ETS d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

La Docencia del futuro

Aplicación de las metodologías docentes más innovadoras a la asignatura de Cálculo.

Joel Saà Seoane

Tutora: M. Rosa Estela

Departamento: MA3

2009

Agradecimientos

Éste es un proyecto en el que llevo ya más de cuatro años trabajando y que, tras este tiempo ha ido dando unos resultados óptimos y envidiables. Comencé en 2004, al acabar mi primer año en la Escuela, como becario de la asignatura de Cálculo y de la profesora M. Rosa Estela, a quien naturalmente dirijo mis principales agradecimientos, pues sin ella nada de esto tendría el más mínimo sentido y ni siquiera se habría empezado a llevar a cabo; y después de tres años como becario y obteniendo multitud de resultados presentados en congresos internacionales de todo tipo, di el salto a trabajar en paralelo y junto a ella al ser ya licenciado en matemáticas. Esta nueva época, desde hace aproximadamente un año, ha supuesto la culminación de este proyecto, con la elaboración de un libro con Pearson Educación y la puesta en marcha definitiva de esta filosofía de docencia en las clases de Cálculo de la Escuela de Caminos, y próximamente en el nuevo grado en Matemáticas. Este gran proyecto culmina pues con esta tesina que trata de compartir y regalar todas las experiencias vividas a fin de que la docencia mejore en todos los ámbitos. Sin duda, si lo que yo he llegado a aprender sobre docencia lo pudiese extender a todos los docentes del sistema universitario, todo iría mucho mejor. Quiero agradecer también a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona, a l'Institut de Ciències d'Educació de la Universitat Politècnica de Catalunya y a l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca, agencia adscrita al Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya, las ayudas ofrecidas, pues nos han permitido trabajar y avanzar en el proyecto del curso de Cálculo en la plataforma Moodle.

No quiero concluir este apartado sin expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que nos han ayudado a desarrollar los materiales que en esta tesina se explican. Han colaborado varios profesores de la Universidad Politécnica de Catalunya, Mónica Blanco Abellán, Pedro Díez Mejia, Jaume Franch Bullich, Marta Ginovart Gisbert y Anna Serra Tort. Sin duda la empresa Maths for More y mediante Ramon Eixarch han aportado muchísimo para la síntesis correcta entre Wiris y Moodle. Y como no, Francesc Massanés Basi, que ha sido siempre mi informático de confianza, por llamarlo de alguna manera cariñosa, y siempre ha estado ahí cuando he tenido problemas técnicos o informáticos. El correcto funcionamiento y ejecución de lo que en esta tesina se encuentra, sería utópico en lugar de real de no ser por su altruista y continua colaboración. Además, sus siempre constructivas críticas han ayudado mucho en que éste texto sea mucho mejor de lo que hubiese sido. Muchísimas gracias a todos, y también a mi familia, a quien a partir de ahora espero poder empezar a devolverles, al menos un poquito de todo lo que me han dado hasta ahora.

Ábstract

Actualmente en las universidades se está trabajando en la creación de los nuevos planes de estudios para las distintas titulaciones y en el proceso de integración de los mismos, siguiendo las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior. Estamos ante una verdadera oportunidad de cambio para adaptarnos a las necesidades actuales y futuras de la sociedad y de mejora de la docencia. Para conseguir los objetivos deseados, se han establecido alianzas y complicidades con agentes sociales e instituciones nacionales e internacionales y se ha profundizado en los problemas que existen en el modelo docente actual.

Es conocido que el nuevo modelo docente presenta un cambio a la docencia tradicional pues ya no serán clases donde el profesor explica el temario y el estudiante asimila los conceptos, sino que está todo basado en el aprendizaje del estudiante. Así pues, es muy importante disponer de material que permita al estudiante seguir correctamente las distintas asignaturas. Gran parte del material existente deberá adaptarse a los nuevos formatos y metodologías que implica el EEES. Actualmente el profesorado dispone de varias plataformas de soporte a la docencia, sin embargo esta diversidad generalmente implica una duplicación de información y no siempre hay una buena integración entre las distintas plataformas. Es por ello que la mayoría de universidades adoptan una plataforma institucionalmente. En el caso de la Universitat Politècnica de Catalunya, al igual que otras muchas universidades españolas y europeas, ha adoptado Moodle institucionalmente. Un total de 1300 institutos y universidades españolas lo usan como complemento a sus clases presenciales, y a escala mundial, cuenta con más de dos millones de usuarios. En tres años, esta plataforma de código abierto se ha puesto a la cabeza del mercado de aprendizaje a distancia, el e-learning.

El australiano Martin Dougiamas iniciaba el proyecto en 1999. La primera versión salió en 2002 y actualmente se está convirtiendo en un estándar de plataforma educativa virtual, con usuarios tan prestigiosos como la británica Open University, con 180.000 estudiantes. Está presente en más de 146 países y se ha traducido a 70 idiomas. Moodle es un proyecto en desarrollo diseñado para dar soporte a un marco de educación basado en el constructivismo social (colaboración, actividades,…) lo que resulta muy útil para profesores y estudiantes. Este tipo de recurso es fundamental para una docencia semipresencial y para una docencia que sintonice con las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior. Permite combinar material docente "tradicional" con material docente interactivo.

En definitiva, la docencia del futuro pasa por la adaptación de todas y cada una de las asignaturas a una plataforma que permita la interacción virtual entre alumno y contenidos, bajo la supervisión continua del profesor. De este modo, el alumno aprende más fuera de clase que en ella y aprovecha las sesiones presenciales para consolidar los conocimientos; un resultado óptimo con mayor recompensa para el profesor y mayor conocimiento y motivación para el alumno.

Nowadays at the many different European University people are working hard on the development of the new studying plans for the different degrees, within the context of the new Superior Education European Space. We are all now in front of a great opportunity of change in order to adapt ourselves to the real and modern but also the coming and future necessities of our society in terms of improve our teaching and learning system at University level. Europe is becoming, little by little, a unique land, in terms of University degrees, and these changes are essential if we want to make this possible. In order to achieve the desired objectives, many alliances and treatments have been established between societies and national and international institutions, and we have all together got in depth with the actual problems that may exist in our current docent model.

It is already known that the new docent model wants to introduce an important change in the current and traditional manner of teaching and learning. From now on, it will not be just a professor teaching in magister lessons at a blackboard and a great group of students trying to paste everything in a paper, understanding nothing and just trying to get the material with which to study afterwards. That is, it will now become essential to have all the needed material before the course begins in order to let the students prepare the lessons and work on them after attending to class. Most of the actual material will have to be adapted to the new ways of teaching, and so mainly, theory papers should be prepared in a digital version, at least, as pdf files, but there will be better ways. There already are some international well-known platforms which focus their objective in help teaching and learning, such as Moodle or Blackboard. Most of the Universities around the world have already chosen one and transferred many contents to these platforms. In Europe, most of the Universities have decided to use Moodle, as it is free software, so over 1300 high schools and Universities already use Moodle in Spain as a complementary platform for their traditional lessons. Moodle has over two million users around the world and nowadays, it is the most used platform as an e-learning platform.

The Australian Martin Dougiamas launched the Moodle project in 1999. The first version was launched in 2002 and nowadays, Moodle is already the most world-wide used educative virtual platform, with prestigious users such as the Open University in Britain, with over 180,000 students. It is already a reality in 146 countries and it has been translated into 70 languages, with Catalan among them. It is based on the social constructivism, like the new 2.0 websites Wikipedia or so. This becomes very useful for both teachers and students. There are many different activities which are essential for distance teaching. It is especially easy to combine both traditional materials with interactive and innovative one.

To sum up, the future teaching starts with the usage of this kind of platforms in all the courses and subjects at University. This will allow the student interact with his instructors and professors and so get more motivation on the courses. The student will feel like studying, and that is the main objective. With all this, the students will learn more at home than in class, but the lessons will be specially useful and interesting for him/her, as will be able to understand what is said, explained or proofed.

Actualment a les universitats s'està treballant en la creació dels nous plans d'estudis per a les diverses titulacions en el procés d'integració dels mateixos en, seguint les directrius de l'Espai Europeu d'Educació Superior. Estem davant d'una vertadera oportunitat de canvi per tal d'adaptar-nos a les necessitats actuals i futures de la societat i de la millora de la docència. Per tal d'aconseguir els objectius desitjats, s'han establert aliances i complicitats amb agents socials i institucions nacionals i internacionals i s'ha profunditzat en els problemes que existeixen en el model docent actual.

És conegut que el nou model docent presenta un canvi a la docència tradicional, doncs ja no seran classes on el professor expliqui el temari i l'estudiant assimili els conceptes, sinó que tot plegat està basat en l'aprenentatge de l'estudiant. Així doncs, és molt important disposar de material que permeti a l'estudiant seguir correctament les diverses assignatures. Gran part del material existent haurà d'adaptar-se als nous formats de suport a la docència, nogensmenys aquesta diversitat generalment implica una duplicació d'informació i no sempre hi ha una bona integració entre les diverses plataformes. És per això que la majoria d'universitats adopten una plataforma institucionalment. En el cas de la Universitat Politècnica de Catalunya, igualment que moltes altres universitats espanyoles i europees, s'ha adaptat Moodle institucionalment. Un total de 1300 instituts i universitats espanyoles el fan servir com a complement de les seves classes presencials, i a escala mundial, Moodle compta amb més de dos milions d'usuaris. En tres anys, aquesta plataforma de codi obert s'ha posat al capdavant del mercat de l'aprenentatge a distància, l'e-learning.

L'australià Martin Dougiamas iniciava el projecte el 1999. La primera versió va sortir al mercat el 2002 i actualment s'està convertint en un estàndard de plataforma educativa virtual, amb usuaris tan prestigiosos com la britànica Open University, amb 180.000 estudiants. Està present a més de 146 països i s'ha traduït a 70 llengües. Moodle és un projecte de desenvolupament dissenyat per tal de donar suport a un marc d'educació basat en el constructivisme social (col·laboració, activitats,...) cosa que resulta especialment útil per a professors i estudiants. Aquest tipus de recurs es fonamental per a una docència semipresencial i per a una docència que sintonitzi amb les directrius de l'Espai Europeu d'Educació Superior. Permet combinar material docent "tradicional" amb material docent interactiu.

En definitiva, la docència del futur passa per l'adaptació de totes i cadascuna de les assignatures a una plataforma que permeti la interacció virtual entre alumne i continguts, sota la supervisió continuada del professor. D'aquesta manera, l'alumne aprèn més fora de classe que a dins i aprofita les sessions presencials per a consolidar els coneixements; un resultat òptim amb la major recompensa per a professor i major coneixement i motivació per a l'alumne.

"Tell me, and I'll forget. Show me, and I may remember. Involve me, and I'll understand."

Proverbio chino

Contenido

Introducción

El siglo XXI es, sin duda, el inicio de la era de la revolución tecnológica. De esto todos somos conscientes. Éste siglo es también el siglo de la globalización y del desarrollo educativo absoluto por parte de los países más desarrollados. Si hace cincuenta años la cantidad de gente que iba a la universidad era minúscula, actualmente, en el mundo occidental los jóvenes que reciben estudios superiores son la mayoría. Año tras año se dice que los alumnos llegan a la universidad peor formados y con menor motivación. No debemos tomarnos estos datos pseudo objetivos como dramáticos, sino como una realidad a la que debemos adaptarnos. Los docentes universitarios de hoy en día disponen de dos opciones: ofrecer las clases que ellos recibían –es decir, clases magistrales puramente teóricas que requieran decenas de horas de dedicación voluntaria en casa–, obteniendo así un éxito ínfimo por parte los alumnos, así como una motivación muy escasa y una devoción por la asignatura nula; o bien ofrecer clases que motiven de forma astuta esta dedicación en casa, obteniendo de este modo resultados óptimos.

El Espacio Europeo de Educación Superior (EEES)

La evidente y continua convergencia de todos los países de la Unión Europea llevó en 1999 y tras la Declaración de Bolonia a la creación del Espacio Europeo de Educación Superior. El principal objetivo de éste resulta en la unificación de los planes de estudio a nivel europeo de modo que los estudios que se realicen en cualquiera de los miembros de la Unión tengan un mismo valor y sean fácilmente adaptados. Una de las bases del EEES trata de unificar un sistema único de créditos, llamados créditos ECTS.

Una de las decisiones tomadas en aquél entonces es la de dejar claro que, durante los estudios universitarios, un estudiante no deja de ser un trabajador que dedica su jornada laboral al estudio de una titulación académica. De esta manera, se estableció que 60 créditos ECTS miden la carga de trabajo de un estudiante a tiempo completo durante un curso académico. De esta forma, un crédito ECTS corresponde a unas 25 a 30 horas de trabajo del alumno.

La gran novedad que ofrecen estos créditos es que miden las horas de trabajo del alumno, no las horas de clase que éste recibe, como hasta ahora. El crédito ECTS incluye las horas de clase, las horas de dedicación en clase, las horas de realización de exámenes, dedicadas a seminarios o a la ejecución de trabajos.

Con todo esto, se puede concluir que las metodologías docentes deben cambiar de forma radical, pudiendo así controlar el número de horas que cada alumno dedica a cada asignatura mediante evaluaciones continuadas, trabajos y ejercicios de autoevaluación obligatorios.

La necesidad de las matemáticas

En los múltiples campos de la ciencia y del conocimiento en general nos encontramos con que las matemáticas nos ayudan a describir y a entender de forma cuantitativa todos los procesos que suceden. Habitualmente y con la intención de tener una idea intuitiva de lo que sucede a nuestro alrededor basta con estudios de un nivel matemático básico; aún así, cuando queremos profundizar en un tema y realizar un estudio exhaustivo, el problema matemático gana rápidamente en complejidad. Las matemáticas son seguramente uno de esos campos de la ciencia que la gente o bien odia o bien le apasiona. Desgraciadamente lo más habitual es encontrarse con gente que las odia pero, por suerte, la percepción que uno tiene de esta ciencia puede cambiar con el tiempo. Aún así, esta percepción no sólo depende de la propia persona sino que también toman un importante papel los profesores de estas asignaturas así como el material docente utilizado. Lo que está claro y resulta inevitable es el evidente hecho de que son la base de cualquier ingeniería así como de cualquier titulación científica en general y es por ello que se encuentra en los primeros cursos de todas las titulaciones de estos ámbitos. El nivel con que se abordan es muy variable, desde titulaciones universitarias que dedican unos pocos créditos en primero con el fin de dar una formación mínima y hasta la propia licenciatura de matemáticas que dedica varios cursos a entender y dominar todos los conceptos relacionados con las matemáticas.

Podemos destacar distintos campos dentro de las matemáticas. Una primera separación temática de esta amplia ciencia podría ser la que la clasifica en: álgebra, análisis o cálculo, y geometría. Desarrollando en paralelo y de forma profunda estas tres ramas se consigue formar una base matemática que converge en los cursos más altos de la licenciatura de matemáticas.

Un buen resultado en una asignatura de ámbito matemático depende, en gran medida, de la dedicación del alumno a la asignatura así como de la capacidad intelectual del mismo. De esta manera, incentivar las ganas del alumno al aprendizaje de las matemáticas resulta una clave evidente de éxito. Formar la visión espacial y comprensión gráfica de los abstractos conceptos teóricos también ayudará al alumno a obtener buenos resultados.

Los matemáticos más puros afirmarían que no se concibe un correcto aprendizaje de esta magnífica ciencia incluyendo nuevas técnicas docentes; es decir, el modo más adecuado de enseñar matemáticas se centra en clases magistrales en pizarra. Probablemente tengan razón, pero también debemos ser conscientes de que no sólo los matemáticos necesitan las matemáticas, y de que gran parte de los ingenieros y científicos de otros muchos ámbitos, necesitan un conocimiento mínimo de éstas. Si el objetivo es acercar las matemáticas al mayor número de alumnos posible no podemos autodestruirnos manteniendo sólo las metodologías docentes más clásicas. Con todo esto, podemos concluir que la exclusiva educación de las matemáticas basada en clases magistrales en pizarra reduce el éxito exclusivamente a la gente con un alto coeficiente intelectual y altamente motivada por estos aspectos, que son un porcentaje prácticamente nulo de la sociedad. De aquí la absoluta urgencia y necesidad de cambiar las metodologías docentes de estas asignaturas.

Antecedentes (MIT Opencourseware)

Des del año 2002 que el Massachusetts Institute of Technology (MIT) lleva desarrollando un proyecto llamado OCW (Opencourseware). El MIT Opencourseware es un banco de información virtual de muchas de las asignaturas impartidas en el centro. Desde la propia universidad se incentiva a los profesores a desarrollar un curso en formato virtual de forma que los alumnos dispongan de un material de máxima calidad y versatilidad. Todo el mundo tiene disponible el material que allí se dispone en cualquier momento y desde cualquier ordenador con conexión a internet.

El objetivo que el MIT perseguía cuando creó el OCW en 2002 era iniciar el cambio en el modelo de docencia que se venía teniendo hasta entonces. Accediendo a alguna de las asignaturas que allí se encuentran, observamos que el formato de material que se facilita sigue una estructura común: contenidos teóricos básicos y motivación de la sesión, a estudiar por el alumno antes de acudir a la clase presencial, y una relación de ejercicios complementarios a realizar a posteriori. También se puede visualizar un calendario completo del curso, enunciados de trabajos y proyectos, material de examen e incluso, en el caso de algún curso más atrevido, como el de Física, vídeos de las sesiones presenciales.

El gran avance de este sistema se obtiene en el momento en que los alumnos se sienten obligados (y motivados) a prepararse las clases presenciales de forma que éstas pueden tener un ámbito mucho más práctico y la absorción de conocimientos por parte del alumno resulta increíblemente mayor: su capacidad de atención es mucho mayor dada la motivación por resolver las dudas creadas en la lectura previa de la sesión y dicha atención no se pierde a media clase al ser las sesiones muy activas y dinámicas.

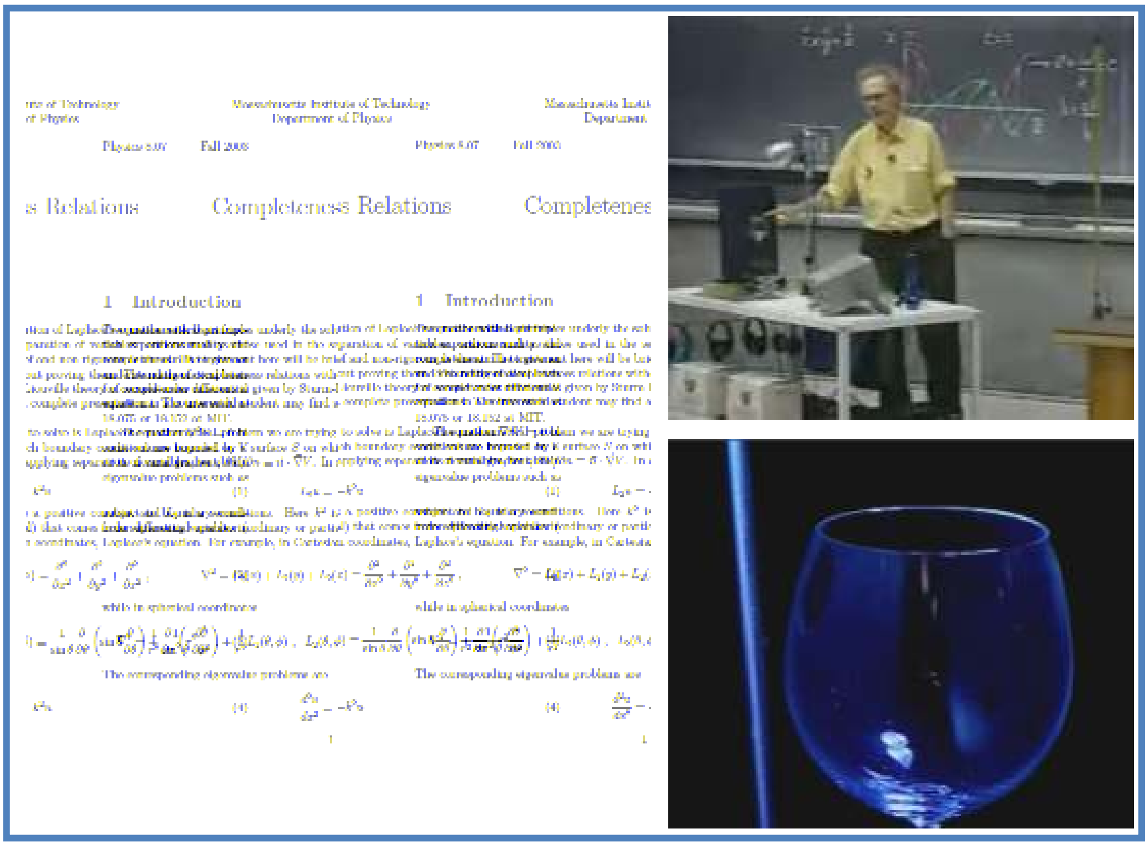


Ilustración 1 - Ejemplo de 'lecture' con el MIT Opencourseware

Objetivos

Considerados todos estos aspectos introductorios se presenta la motivación de adaptar la educación universitaria, y muy especialmente la docencia de asignaturas de ámbito matemático, a las nuevas líneas de enseñanza que se requerirán para triunfar en el siglo XXI. Con este principal objetivo surgió la idea de la presente tesina. Pese a ello, y para poder lograr este objetivo principal se desarrollarán a continuación distintas técnicas de docencia innovadoras y, a la vez, revolucionarias para el sistema docente actual.

De esta manera, un claro objetivo de esta tesina se encuentra también en convencer al lector de la eficacia de los sistemas y métodos aquí presentados. La primera impresión que un profesor probablemente se lleve de la lectura de este texto sea la de desestimar las ideas aquí presentadas por motivos varios: pérdida de la esencia de la docencia clásica, aumento sustancial de la cantidad de trabajo por parte del profesor, excesiva necesidad de involucrarse con todos y cada uno de sus alumnos, y un sinfín de cambios rotundos en su percepción del sistema educativo. Es por ello que el objetivo de mayor importancia resulta en conseguir salvar estas dificultades para el profesor, aunque para ello se necesite, sobretodo, un aumento de las inversiones en el sistema educativo, y conseguir así, que el mismo profesor sea quien presente mayor motivación por realizar estos cambios, que siempre serán muy bien aceptados por el alumno.

Una de las claras consecuencias de una exitosa aplicación de estas técnicas propiciaría un automático aumento en el éxito académico de los alumnos así como una mayor satisfacción personal del profesor y por tanto, una inminente mejor relación alumno-profesor, bucle que activaría de forma autónoma la implicación de ambos y por tanto el éxito global y colectivo. Es por ello que, especialmente en las titulaciones más aplicadas y menos puras, donde el alumno suele presentar una menor motivación por el estudio y un menos agrado por gran parte de las asignaturas recibidas (especialmente las formadoras de base, esas que se encuentran en primero –por ejemplo el cálculo, en el caso de las ingenierías– y que a pocos gustan), se requiere de la aplicación de estos métodos de forma inmediata si se quiere, no sólo salvar el fracaso académico, sino conseguir resultados óptimos.

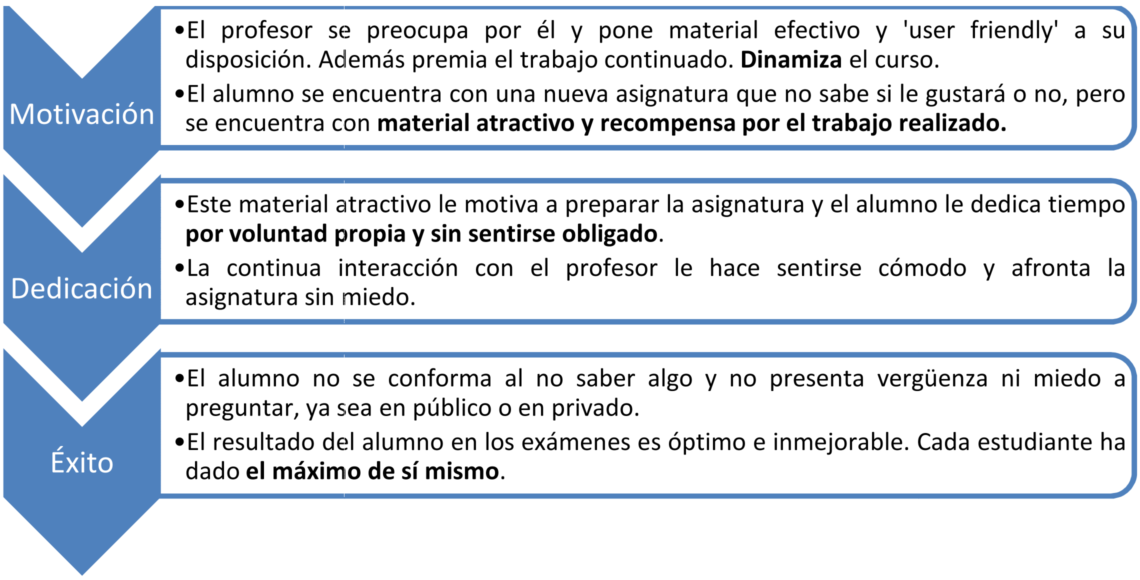


Ilustración 2 – Objetivos a conseguir con el nuevo sistema docente.

1.– Moodle

La plataforma elegida

La plataforma Moodle es una herramienta utilizada ya por un gran número de universidades a nivel mundial y que tiene como principal finalidad la de convertir el material docente de las distintas asignaturas a un material virtual e interactivo así como también fomentar el estudio personalizado y la autoevaluación de cada alumno, en definitiva, potenciar el auto aprendizaje del alumno, dándole libertad y permitiéndole una sencilla y rápida comunicación con el profesor que podrá dar un trato más personalizado a cada estudiante. Esta plataforma se adecúa totalmente a las políticas de enseñanza del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Esta plataforma es la solución a las necesidades de la nueva docencia.

Existen otras plataformas con una filosofía similar, como Blackboard® o Fronter®, pero la gran ventaja que presenta Moodle respecto al resto es que Moodle es una plataforma de software libre y por tanto, muy flexible a adaptaciones por parte del usuario de acuerdo con sus necesidades. Este tipo de software se conocen como LMS (Learning Managment System). Cualquier usuario puede descargar un curso de Moodle y ser el administrador o profesor asignando, a su voluntad, los alumnos o usuarios que tiene. Sobre esta plataforma se desarrolla todo el material docente de soporte a las clases presenciales y el alumno accede desde cualquier lugar y en cualquier momento. Las posibilidades que ofrece el uso de una plataforma virtual se ven todavía más potenciadas cuando toda la universidad, como institución, apuesta por desarrollar todas las asignaturas mediante un curso en la plataforma. De este modo, el alumno –independientemente de las asignaturas que curse e incluso del centro donde las curse– tiene en una misma página web toda la información sobre todas las asignaturas que cursa.

Este tipo de páginas dan, además, una absoluta privacidad al curso del alumno así como un continuo feedback tanto al correo electrónico personal del alumno como al del profesor, si lo requieren. En el momento en que el alumno accede a un ordenador y abre una ventana en el navegador, la primera página que abrirá ya no sólo será su correo electrónico y su Facebook, sino que también accederá a la del curso de Moodle. No podrá evitar entonces el enterarse de cualquier novedad acerca de alguna de las asignaturas del curso.

Moodle tiene más de 46000 sitios registrados con más de 21 millones de usuarios en más de 2 millones de cursos. Wow! Está traducido a más de 70 idiomas (entre ellos también el catalán). Universidades de todo el mundo, como la Open University (con más de 200 mil usuarios) ya han optado por Moodle. En España son también muchas las universidades que han apostado por esta plataforma: UPC, UOC, UB, UPF, URV, UPM, UAM, UPV, UniZar, UCa, UVa, UCo, UniCan… Son pocas las universidades españolas –y europeas– que en 2009 todavía no han apostado por Moodle, y probablemente ya lo hayan hecho en 2010.

Nuevas posibilidades

Nos encontramos en los primeros años de uso de este tipo de plataformas y en particular de Moodle. Es por ello que algunos profesores, preocupados por adaptarse a este evidente cambio a la era de las TIC, han creado sus páginas web personales, colgando material –básicamente archivos *.pdf– y creyendo que esa es la solución única y mejor para engancharse al tren de la tecnología. ¿Cómo motivar a estos profesores a adoptar y aprovecharse de un curso en Moodle?

Los argumentos son abundantes pero más allá de las nuevas posibilidades que ofrece Moodle, como la confección de Tareas y Lecciones, Foros, Chats, Glosarios, Wikis, Consultas, Calendario de eventos y un largo etcétera, debemos aprovechar la posibilidad de crear un entorno de educación único para el alumno. En definitiva, que el alumno disponga de **todo**, absolutamente **todo**, lo que requiera sobre **todos** sus cursos en la misma página. Al acceder a la página principal de Moodle de la universidad y acceder con sus datos personales, el alumno recibe alertas sobre cualquier novedad publicada en las asignaturas cursadas. Es más, si lo precisa, puede solicitar que le informen vía correo electrónico de todos los cambios o novedades. Este hecho facilita la interacción entre profesor y alumno, de forma que si se produce algún cambio de última hora, el profesor tiene la certeza de que el alumno lo sabrá; en cambio, si la información la cuelga en su página personal, difícil será que el alumno acceda todos los días a la misma.

Como ya se ha comentado y ahora se ampliará, además de esta perfecta y casi instantánea interacción entre profesor y alumno, un curso en Moodle ofrece muchas otras posibilidades para **amenizar** y **dinamizar** un curso. Se pueden añadir recursos en los distintos formatos (de Microsoft Office®, de Adobe Acrobat®, de imagen, comprimidos…), se pueden enlazar páginas web externas (pudiendo dejarlas en el entorno del curso) y se pueden componer páginas de texto o páginas web propias. Además, y aquí aparece la gran ventaja respecto a otros sistemas, permite confeccionar distintos tipos de actividades: realizar consultas, encuestas y talleres, confeccionar diarios, glosarios y wikis, interactuar en foros o chats, distribuir los contenidos en lecciones, evaluar mediante cuestionarios, generar bases de datos, proponer tareas.

Consultas

Resulta la herramienta ideal para crear subgrupos de alumnos. Si una asignatura tiene sesiones prácticas o de laboratorio de capacidad limitada puede crear una consulta con los distintos subgrupos horarios, limitando la capacidad de cada grupo. Cada alumno se apunta al grupo que quiera, si quedan plazas. El profesor obtiene la lista automática de grupos así como la de gente que no se ha asignado a ningún subgrupo. Se puede ocultar, o no, al alumno el nombre y cantidad de compañeros que ya se encuentran en cada grupo. También se puede enfocar para obtener la opinión del alumno sobre algún aspecto y éste puede observar automáticamente un gráfico con las respuestas globales de todo el grupo, en cada momento.

Diarios

Este módulo resulta una actividad de reflexión para el alumno y de feedback para el profesor. Se puede pedir al alumno que reflexione sobre algún aspecto concreto del curso y éste debe responder en un cierto tiempo. La respuesta puede ser privada y el profesor puede decidir si la califica. Puede ser una buena metodología para saber el estado de conocimiento de cada alumno de un curso sesión a sesión si el grupo es de pocos estudiantes. Asegura el estudio continuado de la asignatura.

Encuestas

En el modo de encuesta se pueden proponer, y es aconsejable, hasta cuatro tipologías de encuestas estandarizadas sobre la percepción y adaptación del usuario a nuestro curso virtual. Esto proporciona un feedback al profesor o al administrador sobre el éxito de todo el material desarrollado y esfuerzo realizado. También existe alguna encuesta estándar sobre la personalidad del alumno que puede resultar útil para algún curso.

Foros

Los foros disponibles en la plataforma permiten, ante todo, la rápida comunicación a los alumnos de cualquier novedad que el profesor quiera transmitir. De esta manera, resulta recomendable disponer de un foro de Noticias con todos los alumnos suscritos y asegurarnos que todos los mensajes que escribimos son enviados por copia al correo electrónico personal de cada usuario. Además pueden crearse foros de discusión en cada uno de los bloques temáticos del curso, o foros de discusión de los distintos grupos de prácticas.

Glosario

El módulo glosario permite disponer de un banco de conceptos tan amplio como sea necesario. Además, puede motivarse al alumno para que sea éste quien cree el mismo glosario a partir de los conceptos que van apareciendo a lo largo del desarrollo teórico del curso. Siempre que aparezca esa palabra en el curso el usuario podrá redirigirse, mediante un click sobre la palabra, a la definición del glosario. Es una herramienta muy formativa.

Wiki

Las Wikis son espacios pensados para el desarrollo de contenidos de forma cooperativa. De esta manera los distintos usuarios del curso pueden editar contenidos. Puede resultar una forma útil de conseguir traspasar los contenidos del curso a forma digital. El profesor puede analizar, además, qué usuario ha realizado qué modificación.

Chat

Se pueden crear sesiones de chat sistemáticas, o un determinado día (antes de un examen, por ejemplo) en las que los profesores pueden o no participar. Se pueden analizar los comentarios y las conversaciones por parte del administrador y del profesor para asegurarse de su correcto uso.

Taller

El taller resulta la herramienta ideal para el control y gestión de los trabajos prácticos o trabajos en grupo. Permite la entrega y evaluación reiterada de un trabajo con una comunicación alumno profesor continua. De forma que el profesor sabe el estado en el que está el trabajo en cada momento; el alumno sabe cómo está el trabajo en cada fase.

Bases de datos

Se pueden crear bases de datos específicas sobre contenidos del curso que faciliten la obtención de estadísticas de participación o visualización de ciertos contenidos y en un cierto periodo de tiempo. El profesor y el administrador pueden visualizar, en cualquier momento, la actividad de todos los usuarios pero si se precisa saber quien ha entrado entre unas ciertas horas a una actividad (ejercicio voluntario, por ejemplo) se puede crear una base de datos particular facilitando la obtención de datos.

Lección

Las lecciones están pensadas para ser ejercicios de evaluación o, al menos, para asegurarnos que el alumno lee y aprende lo que pretendemos. Se crean páginas de texto o de contenidos teóricos y al final de cada una de ellas se realiza una pregunta tipo cuestionario que puede ser elegida de un banco creado con anterioridad. Si ésta es correcta se prosigue con la lección y si no, sin poder visualizar la siguiente sección de la lección se retrocede según el profesor haya determinado. Véase un diagrama de avance por una lección en la ilustración 3.

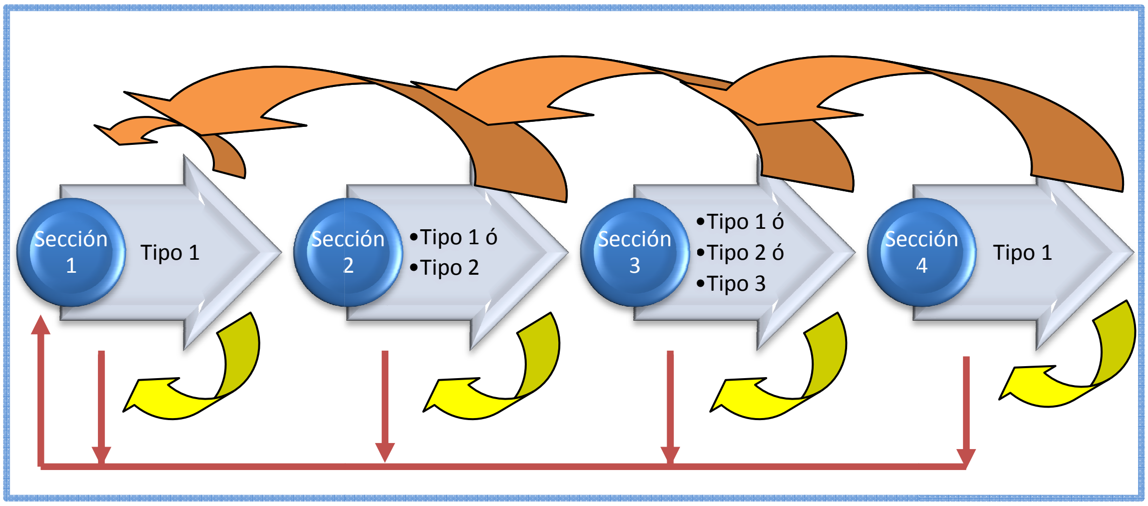


Ilustración 3 - Itinerario para terminar una lección

Cuestionario

El módulo de cuestionario es el que está pensado para la evaluación continuada del alumno. Existen una larga tipología de preguntas que se pueden editar en este módulo y las analizaremos con mayor profundidad en el capítulo de evaluación continuada. Se puede crear un banco de preguntas tan amplio como sea posible y, a posteriori, crear cuestionarios por temas, semanas o bloques. Éstos pueden ser de autoevaluación (sin valor efectivo de nota) y por tanto el alumno recibe retroacción y la corrección; o pueden ser de evaluación, en aula y con ordenador. Todo el sistema de notas queda registrado automáticamente en el servidor pudiendo acceder en cualquier momento y también pudiendo descargar un archivo de Microsoft Excel® en cada instante.

La plataforma Moodle también acepta contenidos de acuerdo con la normativa SCORM que el profesor pueda tener ya creados.

Herramientas de gestión

Otra de las maravillas que ofrece un sistema de gestión de la enseñanza –Learning Managemenet System (LMS)– como Moodle radica en la capacidad para controlar toda la información del curso. Es decir, la gestión de nuestra asignatura resulta automática y se recibe un feedback automático de multitud de información que pueda ser de interés.

Es el fin de la era de las tablas interminables con Microsoft Excel®; Moodle evalúa automáticamente todas las actividades con puntuación ponderándolas según se haya elegido. Además, se pueden incluir tareas adicionales (llamándolas examen) de ejecución no virtual sino presencial y de esta manera podremos subir a Moodle las notas correspondientes a los exámenes en papel. Cada alumno podrá ver su nota al entrar en la plataforma y sólo la suya. De todas las asignaturas de las que está matriculado. Podrá seguir su evolución en la evaluación continuada. El profesor, en cambio, podrá analizar las notas desde multitud de puntos de vista: por alumno, por grupos, del total de los usuarios… Además, podrá analizar estadísticas de comparación de la nota de la asignatura en función del uso de la plataforma virtual, o de la nota final de la asignatura en función de las notas de las evaluaciones continuadas, etc. En definitiva, todo lo que seamos capaces obtener a partir de una hoja de cálculo clásica con cierta dedicación, Moodle lo obtiene de forma automática.

	Cálculo									
Nombre / Apellido	Números reales y complejos	Topología básica en …	Sucesiones y series numéricas	Funciones reales de …	Funciones de varias variables	Cálculo de primitivas	La integral de Riemann	Integrales múltiples de …	Sucesiones y Series de …	Total del curso
OCU ----	-	-	1,00	-	-	-	4,00	-	-	0,56
u0eo8z4 u0eo8z4	4,00	6,00	3,00	8,00	2,00	5,00	4,00	6,00	7,00	5,00

Ilustración 4 - Ejemplo de tabla de visualización de calificaciones

Resulta también especialmente útil el poder obtener estadísticas de acierto en preguntas determinadas tipo cuestionario. De esta manera podremos concluir que si una pregunta la ha respondido todo el grupo correctamente quizás fuese demasiado sencilla; o que una pregunta que ningún estudiante es capaz de realizar correctamente resulta excesivamente complicada. Las recalificaciones son también sencillas e inmediatas desde la plataforma, obteniendo, el alumno involucrado, información al momento.

Otra posibilidad de gestión que permite este LMS radica en la elaboración de un calendario académico. El calendario que observa un usuario de Moodle contempla todos los eventos de cualquiera que sea la asignatura o bloque que lo publica. De este modo resulta sencillo informar al alumno de las fechas y horas (adjuntado aulas y demás información) de las evaluaciones o cualquier otro evento. El profesor también encuentra cómodo este calendario ya que le resume todos los eventos que tiene en las distintas asignaturas que imparte.

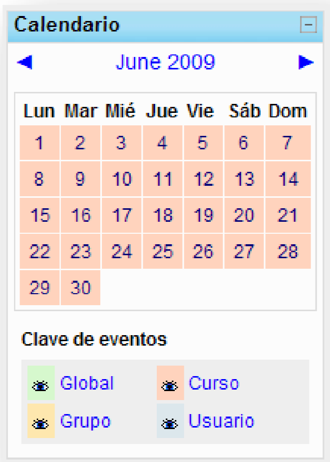


Ilustración 5 - Calendario académico con citas de curso establecidas

Si además, generamos los subgrupos de prácticas mediante consultas e informamos de cualquier novedad mediante el foro, podemos concluir que el alumno dispone de absolutamente todo acerca del curso en la plataforma. Si además, todas las asignaturas que cursa siguen la misma filosofía, nos encontraremos con que el alumno crea una dependencia total por esta página, hecho que le motiva a entrar cada vez que acceda a un ordenador. Como consecuencia, todo este sistema gana en consistencia, ya que al estar convencidos de que el alumno entra continuamente, podemos estar tranquilos de informar vía la plataforma de cualquier novedad, incluso para el día siguiente. Un mecanismo cómodo y eficaz de gestión de un curso y de todos sus estudiantes.

También se dispone de la posibilidad de visualizar las estadísticas de uso, desde múltiples puntos de vista (por alumno, por sección, por fecha, por franjas horarias, en total…). De modo que mediante un simple par de clicks obtenemos una tabla (muy fácilmente descargable a Excel® si se precisa) como la siguiente:

Cálculo

Usted se ha autentificado como Joel Saa (Salir)

Cálculo | Todos los participantes | [more] | Monday, 1 de June de 2009
Todas las actividades | Todas las acciones | Mostrar en página

Conseguir estos registros

Mostrando 5573 registros

Página: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 ...56 (Siguiente)

Fecha	Dirección IP	Nombre completo	Acción	Información
Wed 3 de June de 2009, 18:58	81.184.118.188	Joel Saa	course report log	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 18:57	81.184.118.188	Joel Saa	course view	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 18:34	189.187.116.157	ugbshml ugbshml	course view	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 18:14	189.187.116.157	ugbshml ugbshml	resource view	El plano complejo [Ejercicio]
Wed 3 de June de 2009, 18:13	189.187.116.157	ugbshml ugbshml	course view	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 18:12	189.187.116.157	ugbshml ugbshml	resource view	1.4 Ejercicios resueltos
Wed 3 de June de 2009, 18:11	189.187.116.157	ugbshml ugbshml	course view	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 15:32	200.95.162.52	ujt9s26 ujt9s26	resource view	El plano complejo [Ejercicio]
Wed 3 de June de 2009, 15:28	200.95.162.52	ujt9s26 ujt9s26	course view	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 10:59	147.83.70.78	Rosa Estela	course report log	Cálculo
Wed 3 de June de 2009, 10:59	147.83.70.78	Rosa Estela	course report log	Cálculo
Wed 3 de June de	147.83.70.78	Rosa Estela	course	Cálculo

Ilustración 6 - Tabla resumen de las estadísticas de uso totales del curso

2.- Contenidos teóricos digitales

El primer paso para la creación de un curso digital se centra en la adaptación del material teórico a un aspecto virtual. Muchos profesores disponen de apuntes en Microsoft Word® o formato TeX. Una plataforma como Moodle acepta estos formatos para la creación de material en formato digital. Aún encontrándonos ya bien entrado el siglo XXI, existen numerosas asignaturas que no disponen de ningún tipo de material de soporte: ni libros, ni apuntes o presentaciones. Quizás sean esos casos los que más necesiten una adaptación a la nueva docencia y éste sea su último tren.

Como muchos profesores piensan que los apuntes leídos por pantalla son poco útiles, se quedan en el proceso de colgar archivos en formato *.pdf. Este tipo de formato, pensado sobre todo para imprimir, resulta útil si queremos facilitar al alumno una colección de apuntes para estudiar estrictamente en papel. Leer un *.pdf por pantalla resulta muy incómodo si va más allá de dos párrafos. Pero quedarnos ahí no basta. Disponer de los contenidos teóricos en formato digital y como recurso de Moodle tiene una gran ventaja. No es ideal para el estudio completo por pantalla, que se puede facilitar en papel si corresponde (fácil si el contenido ya está creado en formato digital), pero sí es ideal para el aprendizaje puntual o profundizar en conocimientos.

Y es que las consultas tienen siempre solución. Además de los contenidos interactivos que no permite el papel (de los cuales hablaremos en el siguiente capítulo), se puede explotar la herramienta glosario. Cualquier palabra que no se entienda en una cierta definición, teorema, resultado o ejercicio se puede comprender accediendo a su glosario, simplemente clicando encima suyo. La distribución de los contenidos teóricos en lecciones también permite asegurarnos que el alumno aprende los conceptos que queremos que adquiera antes de seguir dejándole visualizar los apuntes. En esta distribución de las lecciones, para poder permitirles seguir en la lección puede preguntarse por la solución a un problema más o menos largo en lugar de una cuestión sencilla sobre conceptos teóricos. De esta manera, nos aseguramos de que el alumno ha realizado el problema en cuestión correctamente antes de continuar.

En resumen, la distribución de los contenidos teóricos en formato digital no deben reducirse a colgar archivos de Adobe Acrobat® para que el alumno los imprima y estudie sino que debe ir más allá. Distribuir en bloques temáticos o semanales estos contenidos, solicitando trabajo continuado para poderlos visualizar todos y desarrollando un glosario completo de forma que el alumno sienta que le resulta muy sencillo encontrar las definiciones de los conceptos que le vayan apareciendo. También resulta adecuado colgar algunos contenidos mediante archivos *.pdf, claro está, pero deben reducirse a ser resúmenes o actividades motivantes, como veremos en el capítulo cuarto.

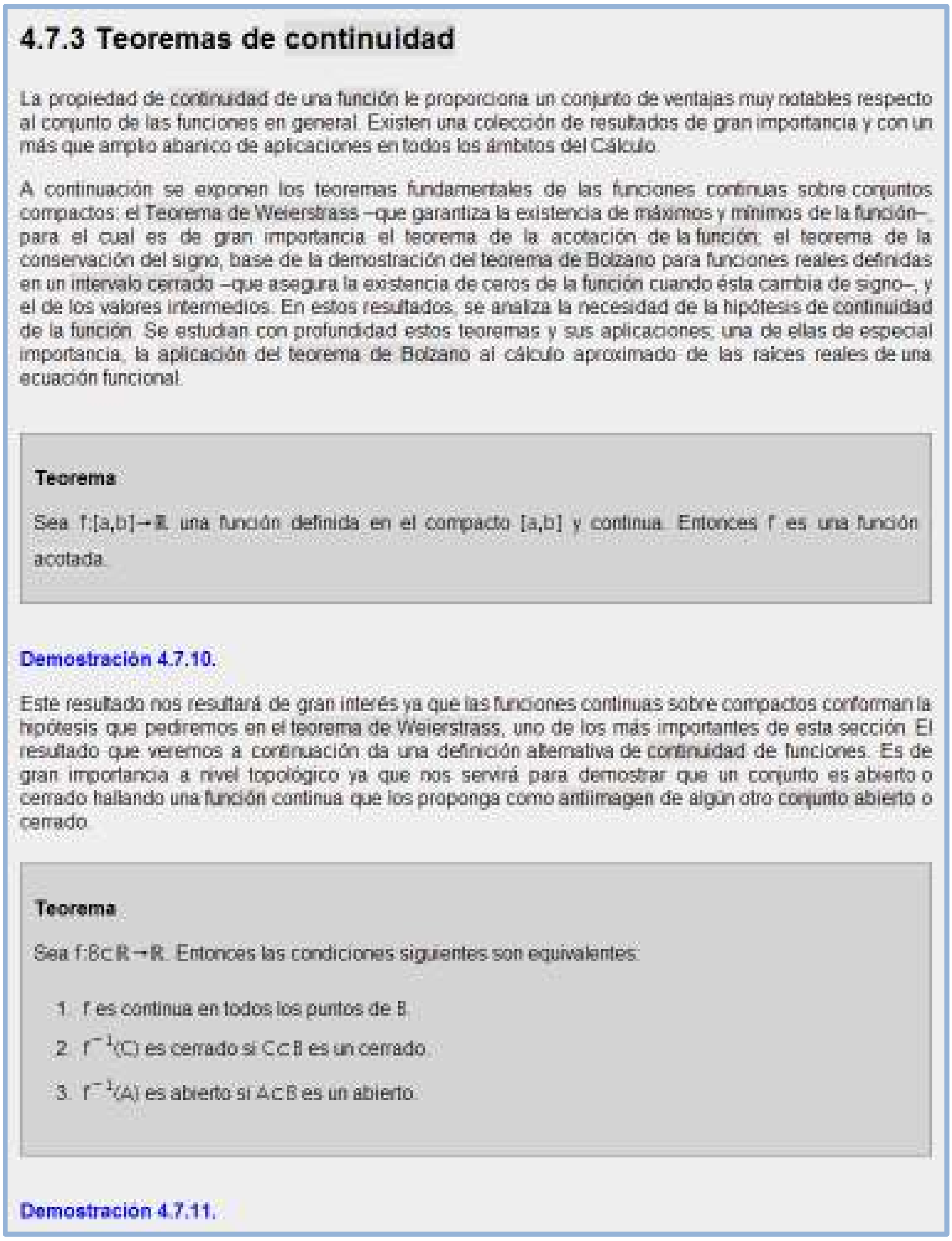
Ejemplo de un curso de Cálculo

En una asignatura de ámbito matemático todas estas técnicas parecen ser todavía más necesarias aunque siempre combinado con el desarrollo de contenidos teóricos. Puede visualizarse el ejemplo de uso de las herramientas virtuales propuestas en un curso de Moodle mediante la dirección web http://147.83.52.113/moodle_tesina accediendo con el siguiente nombre de usuario y contraseña:

Nombre de usuario: tesina

Contraseña: moodle

En esta página se ha desarrollado un ejemplo de curso virtual en Moodle para una asignatura de Cálculo. El resultado obtenido, en lo que a la creación de contenido teórico de forma virtual se refiere tiene el siguiente aspecto.



4.7.3 Teoremas de continuidad

La propiedad de continuidad de una función le proporciona un conjunto de ventajas muy notables respecto al conjunto de las funciones en general. Existen una colección de resultados de gran importancia y con un más que amplio abanico de aplicaciones en todos los ámbitos del Cálculo.

A continuación se exponen los teoremas fundamentales de las funciones continuas sobre conjuntos compactos: el Teorema de Weierstrass –que garantiza la existencia de máximos y mínimos de la función–, para el cual es de gran importancia el teorema de la acotación de la función; el teorema de la conservación del signo, base de la demostración del teorema de Bolzano para funciones reales definidas en un intervalo cerrado –que asegura la existencia de ceros de la función cuando ésta cambia de signo–, y el de los valores intermedios. En estos resultados, se analiza la necesidad de la hipótesis de continuidad de la función. Se estudian con profundidad estos teoremas y sus aplicaciones, una de ellas de especial importancia, la aplicación del teorema de Bolzano al cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación funcional.

Teorema

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función definida en el compacto $[a,b]$ y continua. Entonces f es una función acotada.

Demostración 4.7.10.

Este resultado nos resultará de gran interés ya que las funciones continuas sobre compactos conforman la hipótesis que pediremos en el teorema de Weierstrass, uno de los más importantes de esta sección. El resultado que veremos a continuación da una definición alternativa de continuidad de funciones. Es de gran importancia a nivel topológico ya que nos servirá para demostrar que un conjunto es abierto o cerrado hallando una función continua que los proponga como antiimagen de algún otro conjunto abierto o cerrado.

Teorema

Sea $f:B\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f es continua en todos los puntos de B.
2. $f^{-1}(C)$ es cerrado si $C\subset B$ es un cerrado.
3. $f^{-1}(A)$ es abierto si $A\subset B$ es un abierto.

Demostración 4.7.11.

Ilustración 7 - Aspecto de los contenidos teóricos en Moodle

Observamos un cierto sombreado en gris sobre algunas palabras. Se trata de las palabras que disponen de una definición en el glosario. De manera que si el alumno trata de estudiar los teoremas de continuidad y no recuerda qué es exactamente una función. Simplemente clicando sobre la palabra función obtendrá el siguiente cuadro de glosario:

Función:

Definición (Función).

Sea una terna (A,B,f) una terna. Definimos función o aplicación, a la terna en cuestión formada por dos conjuntos no vacíos: A y B, y una correspondencia f entre ellos que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y=f(x) \in B$. El conjunto A se denomina dominio de la función y se escribe $A=\mathrm{Dom} f$. Es decir,

$$\mathrm{Dom} f=\{x \in A : \exists f(x) \in B\}$$

Si (A,B,f) es una función, diremos que f es una función de A en B y se escribe $f:A \rightarrow B$ o bien $A \xrightarrow{f} B$.

Si $A \subset \mathbb{R}$ diremos que la función es de variable real o de una variable; y si $B \subset \mathbb{R}$ diremos que la función es real. Al número $y=f(x)$ se lo denomina valor o la imagen de f en x. O sea,

$$\mathrm{Im} f=\{y=f(x) \in B : x \in \mathrm{Dom} f\} \subset B$$

Ilustración 8 - Aspecto de las definiciones del glosario

Podemos observar también que en el desarrollo teórico del curso se ha creído conveniente apartar las demostraciones en una nueva página para no densificar e incomodar el estudio de la lección. Si el lector está interesado en el desarrollo de la demostración la obtendrá clicando encima de la misma, obteniendo:

Demostración 4.7.10.

Demostración

Supongamos que f no está acotada en [a,b], entonces,

$$\forall M>0, \exists \{x_n\}_n \ \text{ con } a \leq x_n \leq b \ \text{ tal que } |f(x_n)|>M$$

Entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $\exists \left\{x_{n_i}\right\}_{n_i}$ una subsucesión de $\{x_n\}_n$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_i}=l \in [a,b]$$

y como f es continua se cumple

$$\lim_{i \to \infty} f\left(x_{n_i}\right)=f(l)$$

que resulta ser una contradicción al suponer que f no está acotada.

Ilustración 9 - Ventana externa al desarrollo seguido de la teoría

Si los contenidos están ya desarrollados en formato TeX, por ejemplo, antes de haberlos subido a Moodle, también se puede creer conveniente colgar los mismos contenidos en papel para quien quiera estudiarlos de esta manera. Claro está que también tiene alguna ventaja. De hecho el estudio profundo de unos apuntes será siempre más cómodo en papel que por pantalla; pero el alumno que se pregunte qué es una función, en este caso, deberá buscar otras vías para resolver sus dudas más complicadas que un simple click.

4.7.3. Teoremas de continuidad

La propiedad de continuidad de una función le proporciona un conjunto de ventajas muy notables respecto al conjunto de las funciones en general. Existen una colección de resultados de gran importancia y con un más que amplio abanico de aplicaciones en todos los ámbitos del Cálculo. A continuación se exponen los teoremas fundamentales de las funciones continuas sobre conjuntos compactos: el Teorema de Weierstrass –que garantiza la existencia de máximos y mínimos de la función–, para el cual es de gran importancia el teorema de la acotación de la función; el teorema de la conservación del signo, base de la demostración del teorema de Bolzano para funciones reales definidas en un intervalo cerrado –que asegura la existencia de ceros de la función cuando ésta cambia de signo–, y el de los valores intermedios. En estos resultados, se analiza la necesidad de la hipótesis de continuidad de la función. Se estudian con profundidad estos teoremas y sus aplicaciones; una de ellas de especial importancia, la aplicación del teorema de Bolzano al cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación funcional.

Teorema
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el compacto $[a,b]$ y continua. Entonces f es una función acotada.

Demostración Supongamos que f no está acotada en $[a,b]$, entonces,

$$\forall M > 0, \quad \exists \{x_n\}_{\mathbb{N}} \text{ con } a \leqslant x_n \leqslant b \text{ tal que } |f(x_n)| > M$$

Entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $\exists \{x_{n_j}\}_{n_j}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = l \in [a,b]$$

y como f es continua se cumple

$$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(l)$$

que resulta ser una contradicción al suponer que f no está acotada. □

Este resultado nos resultará de gran interés ya que las funciones continuas sobre compactos conforman la hipótesis que pediremos en el teorema de Weierstrass, uno de los más importantes de esta sección. El resultado que veremos a continuación da una definición alternativa de continuidad de funciones. Es de gran importancia a nivel topológico ya que nos servirá para demostrar que un conjunto es abierto o cerrado hallando una función continua que los proponga como antiimagen de algún otro conjunto abierto o cerrado.

Teorema
Sea $f : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f es continua en todos los puntos de B.
2. $f^{-1}(C)$ es cerrado si $C \subset B$ es un cerrado.
3. $f^{-1}(A)$ es abierto si $A \subset B$ es un abierto.

-1-

Ilustración 10 - Versión *.pdf de los contenidos teóricos

De algún modo, lo que queda claro de los distintos métodos descritos con anterioridad es que una combinación inteligente de ambos es probablemente la solución óptima. Es decir, disponer de los contenidos en formato digital perfectamente adaptados al formato Moodle ofrece algunas ventajas, aunque también varios inconvenientes para el lector, así como el archivo en formato .pdf para que el alumno se descargue. Veamos.

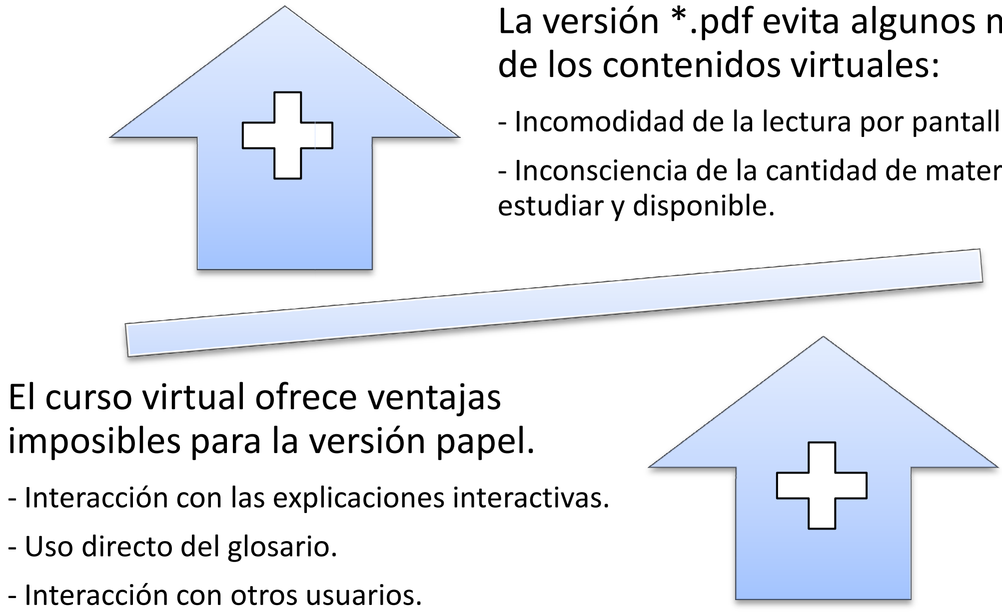


Ilustración 11 - Propiedades del uso de los contenidos en versión virtual vs uso de los contenidos en papel.

Y en definitiva, la combinación de ambos, ofreciendo al alumno un curso en Moodle junto a una versión en papel de los contenidos de la asignatura (mediante un libro o colgando archivos *.pdf en la misma plataforma digital) resultará óptimo para el proceso de aprendizaje.

3.- Contenidos gráficos interactivos

En el capítulo anterior hemos podido ver algunas de las ventajas de disponer de un curso en pantalla dadas las enormes posibilidades que ofrece un ordenador y no un papel. Pese a ello, la gran ventaja y el gran campo a explotar en este sentido resulta la realización de contenidos gráficos e interactivos. La gran mayoría de asignaturas tienen un soporte gráfico difícil de representar en una pizarra y con tiza y la mayoría de profesores ya disponen de este material gráfico a ordenador. Existen multitud de programas que pueden ser adecuados para la realización de gráficos, y dependerá de cada asignatura la elección del más adecuado.

En ámbitos matemáticos la mayoría de profesores optan por algún software del estilo Maple® o Matlab®. Éstos son programas bastante potentes a nivel de programación pero sus recursos gráficos para cursos básicos de matemáticas (los más solicitados) sean quizás algo mejorables. Adaptar contenidos de estos programas a Moodle es algo que ya está en proceso y existen ya algunas soluciones.

Para el desarrollo de gráficos en dos o tres dimensiones existe también la herramienta Wiris®, que está ya totalmente acoplada a Moodle, permitiendo la interacción entre ambas tecnologías. El resultado es increíble. El objetivo no es la incrustación de imágenes: de hacer eso, no avanzaríamos respecto a lo que se puede encontrar en un libro; el objetivo es conseguir la inserción de una ventana gráfica, con la representación de la figura en cuestión, y que permita la interacción entre el usuario y la figura. De modo que el alumno pueda modificar los parámetros de la gráfica (en el caso de ser conceptos teóricos y para entenderlos mejor) o simplemente mover la figura para una mejor visualización. En esta línea podemos clasificar estos elementos gráficos en tres bloques: imágenes móviles, laboratorios virtuales y ejercicios interactivos.

Imágenes móviles

Lo que en una versión en papel (como esto) de unos apuntes es una simple imagen incrustada relativamente difícil de visualizar, especialmente si la imagen es en tres dimensiones (el papel sólo tiene dos) y todavía más si se trata de una impresión o fotocopia en blanco y negro, en Moodle puede convertirse en algo magnífico: la misma imagen en color, y además, el usuario puede moverla sencillamente desplazando el ratón sobre la misma para visualizarla desde distintos ángulos. Así, por ejemplo lo que en papel sería la imagen de la ilustración 12, en la versión digital sería un cuadro con la misma imagen, en color y móvil.

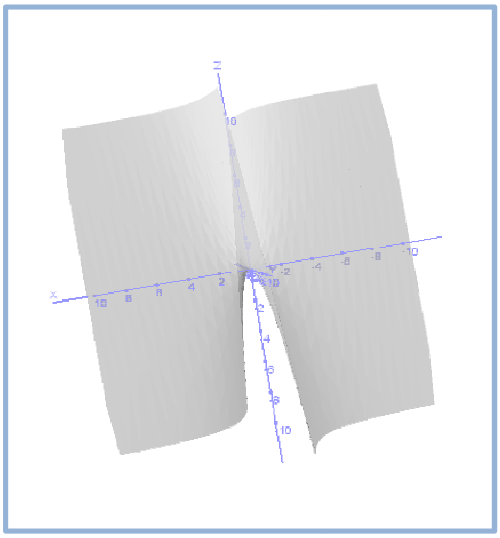


Ilustración 12 - Imagen en papel

Visualizaríamos algo como la siguiente tira de imágenes. De hecho, todavía mucho mejor. Puede imaginarse o comprobarlo en el curso digital adjunto a la tesina.

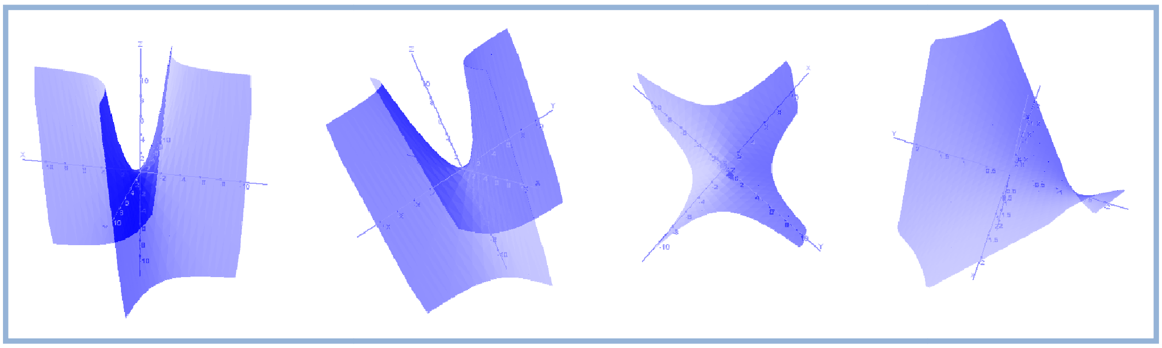


Ilustración 13 - Distintas capturas de la versión digital de la misma imagen

Observamos que no sólo podemos girarla para visualizarla desde otros ángulos y no perder ningún detalle de la forma de la figura sino que también resulta inmediato acercar o alejar la imagen visualizando mejor los detalles que puedan interesar, como se percibe en la última captura.

Laboratorios virtuales

Esta herramienta se ha desarrollado para fomentar el estudio de los conceptos teóricos por parte de los alumnos. Representan ideas puramente teóricas y con sencillos ejercicios de interacción entre una ventana incrustada y el alumno, que acabará entendiendo el concepto con el que está tratando de forma rápida si el estudio directo de la definición o teorema correspondiente no resulta suficientemente eficaz y satisfactorio.

La intención de los laboratorios no es que el alumno resuelva ningún problema práctico, sino que, a partir de distintos casos prácticos o aplicaciones, entienda la esencia de un concepto teórico. En ningún caso serán sustitutivos de las definiciones esenciales o de los teoremas rigurosos, pero si complementarios para su comprensión. Veamos, en la ilustración 14, el aspecto de alguno de estos laboratorios en el ámbito de una asignatura de Cálculo.

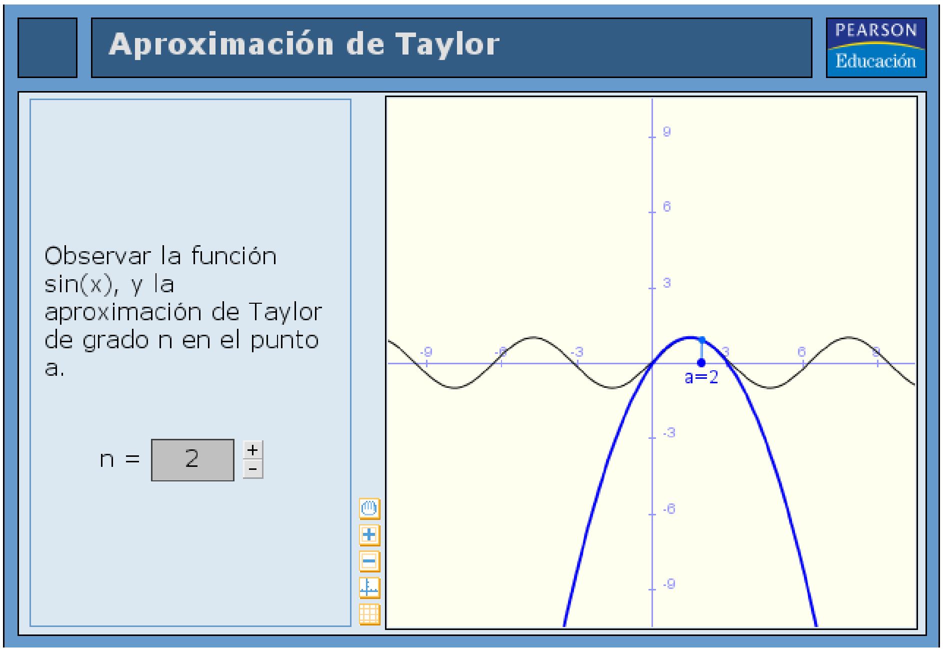


Ilustración 14 - Laboratorio de soporte al teorema de Taylor

Y si el alumno modifica los parámetros del laboratorio observa los distintos resultados. Veamos algunos de los posibles gráficos observados por el alumno, que obtendrá sus propias conclusiones. El primero aumentando el grado del polinomio de Taylor (el alumno concluye que el polinomio de Taylor se parece cada vez más a la función en el punto estudiado) y el segundo aumentándolo todavía más además de cambiar el punto de estudio (que asegura al alumno que se trata de un teorema local ya que en cada punto tiene resultados distintos). En definitiva, el alumno aprende la esencia del problema, objetivo logrado.

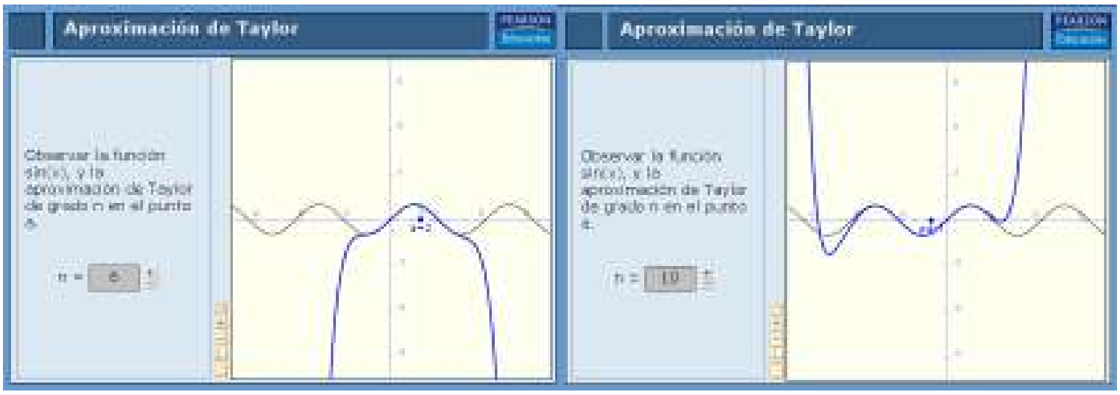


Ilustración 15 - Modificación de los parámetros del laboratorio

Este tipo de herramientas, y a diferencia de las imágenes presentadas en la sección anterior, requieren de un pequeño tiempo de dedicación a la programación de los mismos. La dificultad de programación depende del laboratorio que se quiera realizar pero no suele ser motivo de excesivo tiempo de preparación, se trata de una programación usando Wiris®, altamente 'user friendly' y convencional.

La dificultad de plasmar todas estas posibilidades interactivas en unos apuntes en papel resulta obvia. Precisamente por eso, son este tipo de herramientas las que permiten considerar un curso como adecuado a las nuevas tecnologías, y no simplemente el disponer de una página web, habitualmente vacía de contenidos interactivos.

Ejercicios interactivos

El siguiente paso del proceso de adaptación de material docente a un entorno virtual está en la creación de ejercicios interactivos. Un determinado enunciado de un problema propuesto en papel puede, habitualmente, adaptarse a alguna herramienta gráfica virtual que le da un toque distintivo. Se puede pensar en crear un banco de preguntas aleatorias utilizando algunas técnicas de programación pero si detrás tenemos la idea de evaluarlas el proceso se complica ligeramente y lo abordaremos en capítulos posteriores. Si tratamos de crear ejercicios de este tipo a nivel exclusivamente de autoevaluación estamos ante los llamados ejercicios interactivos.

Si además de generar un banco de ejercicios de autoevaluación semi aleatorios a partir de instrucciones básicas de programación disponemos de algún aspecto gráfico aleatorio, conseguiremos crear un banco de cuestiones muy agradables para el alumno y que, sin duda, le motivarán a intentarlo. Veamos en las imágenes de la ilustración 12 los distintos enunciados que se pueden recibir (entre otros muchos) de un problema sobre convergencia uniforme en un curso de Cálculo.

Observamos el feedback que proporciona el mismo cuadro del problema en el caso de acertar o no acertar. Se pueden proporcionar pistas o incluso retroacciones para cada caso. Apretando sobre el botón Nuevo se obtiene un nuevo enunciado. El alumno puede comprobar, a partir de estos ejercicios, su grado de consolidación del concepto de convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

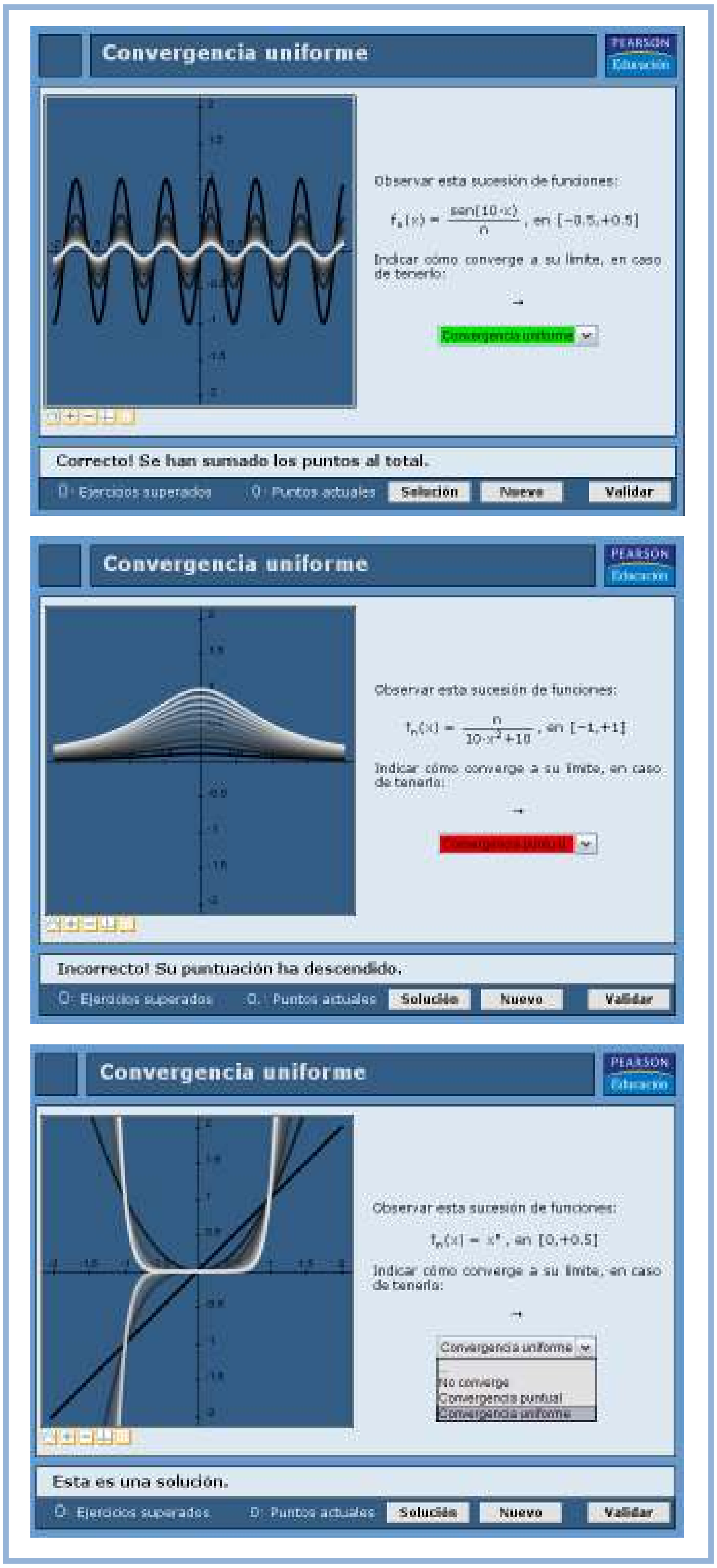


Ilustración 16 – Ejercicios interactivos aleatorios de convergencia uniforme

4.- Diseño de la docencia previa al aula

Seguramente la principal clave en el futuro de la docencia sea obtener el mayor rendimiento posible de las clases presenciales. Para ello es necesario, como queda ya de sobras demostrado, que el alumno esté motivado en las horas de clase en aula y tal fin se consigue únicamente diseñando clases en las que el alumno pueda interactuar. La propia redacción de los documentos que constituyen el EEES deja claro que **un nuevo modelo de enseñanza y aprendizaje sólo funcionará si está centrado en el sujeto que aprende y no en el que enseña.**

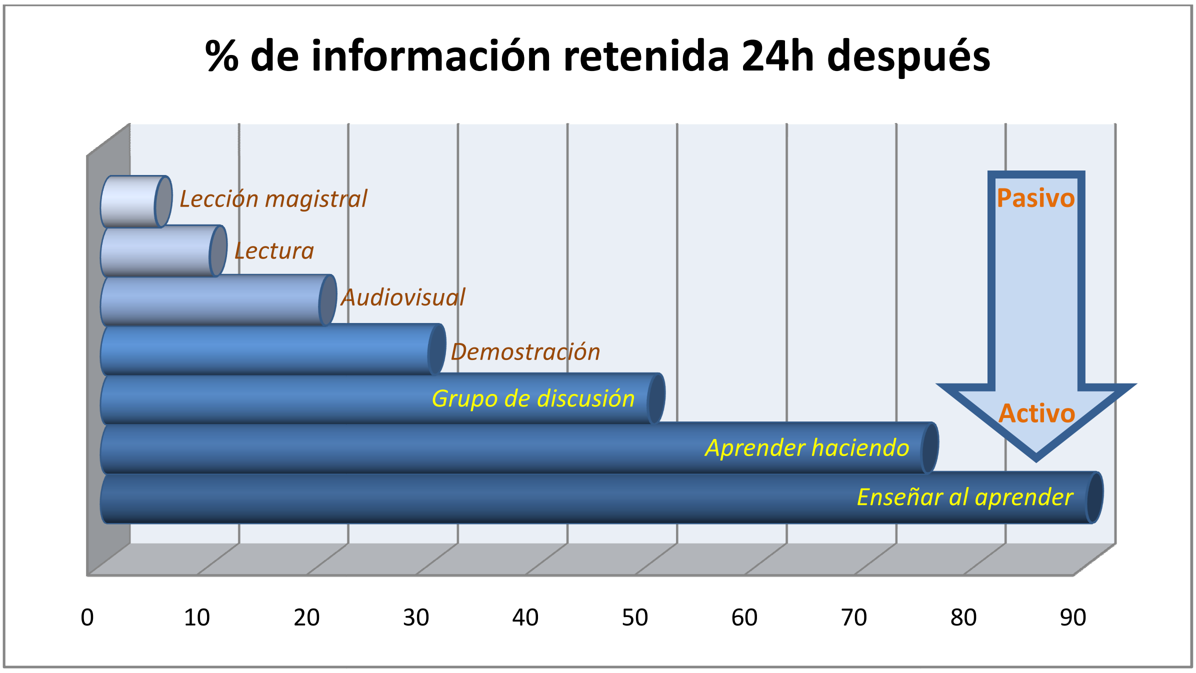


Ilustración 17 - Proporción de conocimientos retenidos al aprender. Fuente: National Training Laboratories Institute, Bethel, Maine. USA.

Este cambio radical de chip, que frena a muchos profesores pero que es la fórmula única de la mejora de la docencia, tiene implicaciones directas inmediatas. Para que el estudiante pueda intervenir en clase deben cumplirse dos premisas básicas: el alumno debe haberse preparado los contenidos de la misma con anterioridad; y los contenidos de la clase deben ser mucho menores que los actuales, a fin de poder dedicar tiempo a interactuar con los estudiantes sin temer por no poder acabar el temario previsto.

Una buena solución resulta el proponer (¡y exigir!) al alumno una preparación previa de la clase. En esta preparación previa el alumno puede estudiar por su propia cuenta los contenidos más básicos (para luego poder ser obviados) así como situarse en la temática y ambiente de la lección, cosa que le permitirá seguir el hilo de la clase con facilidad. Para que esto sea posible es fundamental, entonces, el buen diseño de la docencia previa al aula, por parte del profesor. Será un buen diseño si se logran los dos siguientes objetivos: motivar al alumno para que esté atento y participativo en clase; y darle la oportunidad de tener unos conocimientos mínimos sobre el tema para que pueda intervenir.

Existe un peligro: si damos los apuntes al completo de la asignatura de antemano, estaremos motivando al alumno a que no venga a clase y estudie por cuenta ajena. Es por ello que todo debe hacerse en su justa medida. El óptimo es, luego, facilitar al estudiante algunos ejemplos especialmente interesantes y que llamen su atención, así como los resultados más básicos y algún ejercicio que inspire su motivación (el ejercicio ideal es aquel que el alumno no sabe resolver, aunque sí lo entiende, antes de la clase y sí sabrá resolver perfectamente al acabar la lección).

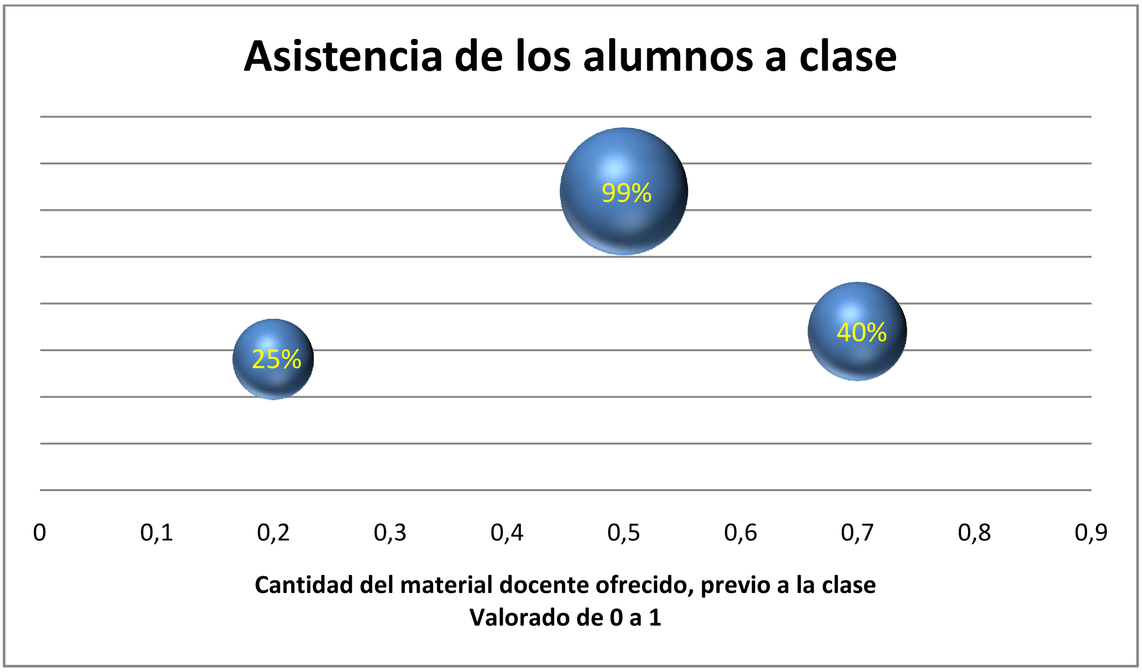


Ilustración 18 - Gráfico ilustrativo de la asistencia de alumnos a clase según la cantidad de material proporcionado

Es decir, debemos aportar el material justo y necesario antes de las lecciones. Además, con una capacidad de motivación máxima. Ésa es la fórmula perfecta de preparación de las sesiones presenciales de clase.

Ejemplo de texto de motivación

A continuación encontramos un ejemplo de texto de motivación que los alumnos deberán leer antes de asistir a la primera clase del tema de integración de Riemann. En este texto los alumnos encuentran una introducción mediante el contexto histórico del tema, así como un sencillo ejemplo de aplicación de esta teoría que, aunque sencillo, es de cierta atracción para un estudiante de ingeniería.

Al lector no le será difícil entender y seguir el texto y el ejemplo pese a no haber cursado nunca todavía estos contenidos y, por otro lado, sí que se verá probablemente atraído y motivado por las grandes puertas que abre este nuevo tema. Las aplicaciones prácticas de gran vistosidad que ofrecen los temas son las que deben ser reservadas para estos textos.

La integral de Riemann

Bernhard Riemann nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz (Alemania) y murió afectado de una tuberculosis el 20 de julio de 1866 en Selasca (Italia). Fue un destacado matemático, realizando contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial. Realizó sus estudios de matemáticas en las universidades de Göttingen (donde asistió a conferencias de Gauss) y Berlín, donde recibió lecciones de Dirichlet, Jacobi y Eisenstein. En diciembre de 1853 se presentó a un concurso para una plaza como "Privatedozent en Göttingen, y en una de las memorias que presentó, que lleva por título "Sobre la representación de una función para series trigonométricas introduce lo que en nuestros días se denomina "Integral de Riemann".
La integral de Riemann presentó la primera base sólida del cálculo integral. Tal como veremos en éste capítulo, la idea fundamental de la definición de la integral de Riemann es utilizar aproximaciones inferiores y superiores a la integral de una determinada función en un intervalo y que representa el área bajo la curva de la función.
La integral de Riemann resuelve la mayoría de los problemas del cálculo integral, pero es importante destacar que la integración de Riemann no interactúa perfectamente con el cálculo de límites de funciones, dificultando por ejemplo, el estudio de series de Fourier y Transformadas de Fourier. Existe otro tipo de integración, la integral de Lebesgue, que permite calcular integrales para una clase más amplia de funciones, que pueden aparecer, por ejemplo, en determinados procesos de cálculo o de la teoría de Probabilidades. Esta integración debe su nombre al matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941).
La construcción de la integral de Lebesgue no está condicionada por la "casi continuidad que requiere la teoría de integración de Riemann, y si la función es integrable Riemann, la construcción de Lebesgue proporciona el mismo resultado que la de Riemann.
Además, en la integral de Lebesgue se cumplen un mayor número de teoremas de convergencia, siendo el resultado definitivo en este sentido el "teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, que permite integrar término a término una sucesión de funciones si cada elemento de la sucesión de funciones es una función integrable Lebesgue y si además, la sucesión está dominada por una función integrable Lebesgue.
Cabe señalar que a pesar de haber sido la integral de Riemann ampliamente superada por la integral de Lebesgue, su importancia tanto en el Análisis matemático como en las aplicaciones no ha quedado en ningún modo disminuida. Veamos a continuación un ejemplo de aplicación de la integral de Riemann.

El cálculo de integrales definidas que se introduce en este capítulo tiene un enorme abanico de aplicaciones. Un ejemplo particular dónde es necesario el cálculo de integrales de Riemann aparece en un ámbito relacionado con la aeronáutica. ¿Por qué vuelan los aviones?

Las fuerzas que ejerce el aire sobre las alas de un avión cuando éste avanza son las llamadas lift y drag (componentes vertical y horizontal respectivamente de la fuerza resultante que el aire ejerce sobre el ala). El lift levanta el avión y compensa su peso y el drag es la resistencia que debe vencer el impulso del motor. Para el cálculo de la resultante de la fuerza que percibe el ala se suele tomar un sistema de referencia que se mueve con su contorno y estas componentes se proyectan, en primera instancia, sobre un sistema de referencia centrado en eje del ala y con direcciones N y A que se muestran en la figura 7.1.

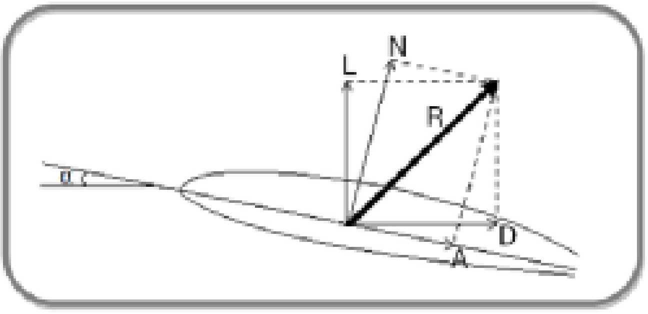


Figura 7.1

Si el eje del ala forma un ángulo α con la horizontal, el lift y el drag expresados en términos de este nuevo sistema de referencia se expresarán:

$$\begin{cases} L = N\cos\alpha - A\sin\alpha \\ D = N\sin\alpha + A\cos\alpha \end{cases}$$

Para el cálculo de las fuerzas resultantes totales supondremos que el ala que tenemos es cilíndrica y por ello nos centraremos en calcular la fuerza resultante por unidad de longitud. Entonces, calcularemos A' y N' que, si b es la longitud del ala mostrada en la fig 7.2, son

$$A' = \frac{A}{b} \qquad N' = \frac{N}{b}$$

Considerando un elemento diferencial de contorno de ala dl y teniendo en cuenta que las fuerzas de presión que ejerce el aire sobre ese elemento diferencial tendrán una componente normal (p) y otra tangencial (τ) al elemento dl, que de acuerdo con la fig 7.3 formará un cierto ángulo θ con las componentes N' y A'.

Parametrizando respecto de la coordenada x se tiene el cambio

$$dl\cos\theta = dx \qquad dl\sin\theta = -dy = -\frac{dy}{dx}dx$$

Para terminar los cálculos se suele despreciar la tensión tangencial

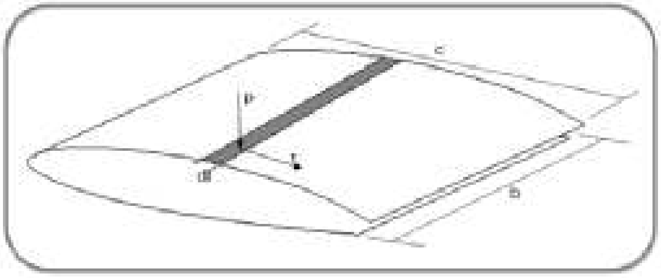


Figura 7.2

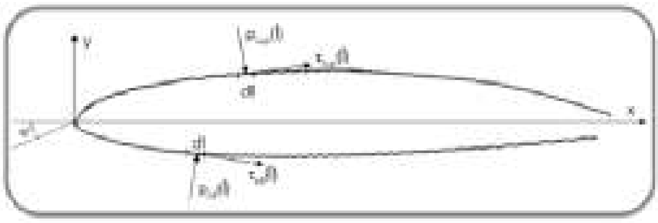


Figura 7.3

$$\tau = 0$$

ya que la presión del aire puede considerarse la única componente relevante de la tensión. De esta manera, se puede escribir la integral que facilita el valor de N' y A' como,

$$N' = \int_0^c (p_{inf} - p_{sup})dx$$

$$A' = \int_0^c \left(p_{inf}\frac{dy_{inf}}{dx} - p_{sup}\frac{dy_{sup}}{dx} \right) dx$$

Si ahora deshacemos el cambio de ejes para regresar a los valores del lift y del drag obtenemos (si nos centramos en el lift):

$$L' = \cos\alpha \int_0^c (p_{inf} - p_{sup})dx + \sin\alpha \int_0^c \left(p_{inf}\frac{dy_{inf}}{dx} - p_{sup}\frac{dy_{sup}}{dx} \right) dx$$

Y considerando otra simplificación común suponiendo que el vuelo del avión es prácticamente horizontal, podremos despreciar el valor de $\sin\alpha$ para finalmente concluir que

$$L' \simeq \cos\alpha \int_0^c (p_{inf} - p_{sup})dx$$

De modo que el cálculo del lift puede realizarse, bajo dichas hipótesis, de forma analítica resolviendo la integral justamente planteada para la ley de presiones correspondiente. Hasta ahora hemos aprendido a calcular primitivas, a hallar las soluciones de la ecuación $x = f'(y)$. Hemos visto que las primitivas no son únicas ya que siempre aparece un término constante que tendremos como grado de libertad y que es totalmente independiente del propio cálculo de la primitiva. Este único grado de libertad queda fijado en el momento en que damos el valor de la función en un punto, o lo que es lo mismo, en el momento en que ponemos límites de integración en el cálculo de la misma.

Ejercicios de motivación

Conjuntamente con esta lectura previa e introductoria se deberán ofrecer una corta colección de problemas o ejercicios cortos, sencillos y básicos que tengan por objetivo dar a entender al alumno el sentido del capítulo así como su razón de ser. El objetivo debe ser, en todo caso, llamar la atención del lector y captar su motivación y ganas y no frustrar sus aspiraciones al darse cuenta que no sabe hacer nada. Es decir, ¡no nos pasemos en la dificultad de los mismos! Si esto se consigue, el éxito está prácticamente garantizado, pues el alumno se esforzará sin que esto suponga, para él o ella, ningún esfuerzo inabordable.

A modo de ejemplo y para el capítulo de integral de Riemann propondríamos la corta colección de cinco ejercicios que ofrecemos a continuación.

1.- Supongamos que una partícula se mueve a velocidad constante de 25m/s. ¿Qué distancia habrá recorrido en 100s?

2.- Sabiendo que la expresión de la velocidad de una partícula, en términos del tiempo, viene dada por la expresión:

$$v(t) = 9.81t$$

¿Cuál es la expresión del desplazamiento en función del tiempo x(t)?

3.- Sabiendo resolver ecuaciones de primer grado, trata de resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

4.- Inténtalo ahora con la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

5.-¿Y ahora sabes?

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$$

La solución de estos ejercicios, que seguro el alumno sabrá encontrar pese a no haber entrado todavía en profundidad en el tema, le harán ver y entender la importancia del capítulo, estimulando sus ganas por aprender y entender la esencia de la integral de Riemann.

5.- Diseño de las sesiones presenciales

Una vez llevada a cabo la buena preparación de las sesiones presenciales llega el momento de conseguir el máximo rendimiento de las clases. Estas sesiones deben ser partidas en bloques de una hora, pues si se alargan más la atención del alumno mengua de forma estrepitosa perdiendo los niveles de rendimiento esperados. Si el alumno ha llegado a esta sesión con la preparación prevista realizada, el objetivo es ahora que acabe de aprender los contenidos importantes del tema y, en cualquier caso, no se debe decepcionar y/o desaprovechar las expectativas que el diseño previo a las clases han generado.

Si el alumno percibe que aprende, y que la preparación previa a la sesión le ha resultado de especial utilidad, seguirá haciéndolo, sesión a sesión; sino, todo el trabajo centrado en el diseño previo de las clases y analizado en la sección anterior será hecho en vano. En conclusión, las sesiones presenciales deben centrarse en dos principales objetivos:

1- Enseñar los contenidos teóricos y prácticos de la lección, haciendo especial énfasis en los puntos más complicados;
2- Aprovechar la motivación generada en los alumnos para su mejor aprendizaje e incentivar que éstos sigan preparándose las clases futuras.

Para poder enseñar todos los contenidos del capítulo analizado en cada sesión, puede resultar útil ayudarse de medios audiovisuales, que permitirán avanzar más rápido en aquellos contenidos más básicos y sencillos que probablemente el alumno ya haya estudiado como parte de la preparación de la sesión. El profesor puede focalizarse entonces en la interpretación y divulgación de los conceptos más complicados asegurándose, en todo caso, de que éstos acaban siendo comprendidos.

Además, el uso de este material audiovisual, en su justa medida, ayudará a mantener los niveles de expectativas y motivación generados ya en la asignatura. Queda claro que debe ser en su justa medida, pues una sesión de una hora con un profesor hablando de forma monótona sobre una presentación audiovisual y con las luces apagadas tendría unos efectos somníferos incuestionables que no ayudarían, en ningún caso, a mantener los niveles de trabajo y motivación por la asignatura.

En la sección anterior de este texto hemos aportado una ilustración sobre la cantidad de conceptos retenidos según la participación del alumno en clase. Quedaba claro que el punto óptimo se encuentra cuanto mayor es la interacción entre alumno y profesor así como cuanto mayor es la participación de los alumnos en clase. Considerando que se suele disponer de grupos de alumnos bastante numerosos resulta difícil proyectar sesiones de presentaciones por parte de los alumnos o mesas redondas de discusión entre ellos, aunque cuando esto sea posible resulta también una herramienta de muy buenos resultados, una vez más, en su justa medida claro está. Aquí se proponen un par de metodologías de docencia en clase para ayudar a la participación del alumno.

Combinación de pizarra con proyección de presentaciones

Esta solución ya ha sido adoptada por muchos profesores en sus clases aunque con distinto éxito para cada caso. El uso de una pizarra y el seguimiento de los distintos conceptos con ayuda de de tiza y pizarra resulta imprescindible ya que consigue captar la atención del alumno así como marcar un ritmo más o menos alto pero siempre accesible al ritmo de aprensión del alumno (si se van realizando pausas para clarificar y extender los conceptos descritos). Pese a ello, cuando los conceptos que se describen resultan más o menos básicos y conocidos por todos los oyentes, la enseñanza en pizarra puede producir bastante aburrimiento y somnolencia y es uno de los principales agentes que producen una percepción habitual entre los alumnos: ir a clase es inútil, me rinde más quedarme en la biblioteca estudiando.

Ilustración 19 – Ejemplo de transparencia proyectada

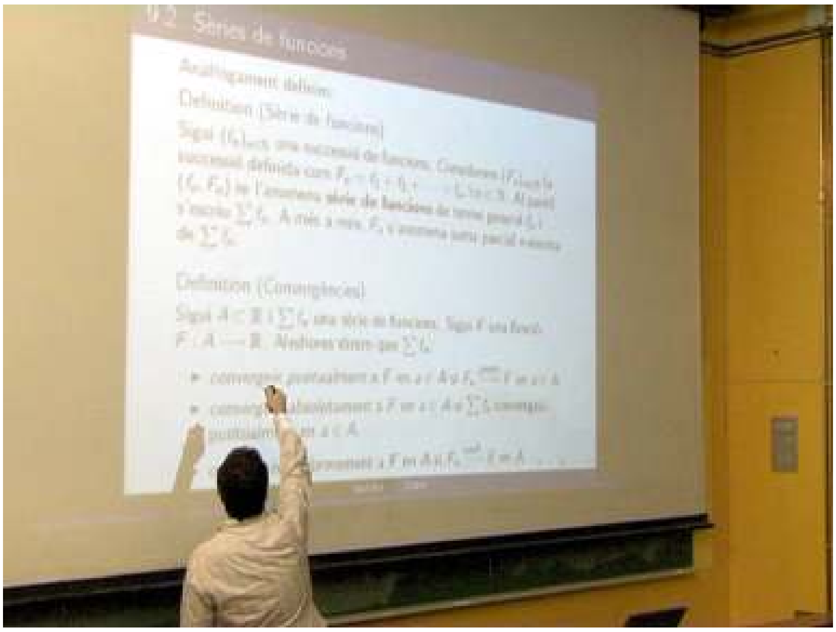


Ilustración 20 - Tiempo de sesión presencial mediante proyecciones

Ilustración 21 - Sesión en pizarra sobre números complejos

Es por ello que la proyección de presentaciones puede ser la solución óptima para estos casos. Permite aumentar el ritmo de explicaciones cuando éstas son básicas y conocidas por todos así como el uso de elementos gráficos (interpretación o representación gráfica de conceptos) que habitualmente son complicados de dibujar en pizarra. Además, si se dispone de algún elemento interactivo se puede usar en clase a modo de ejemplo y demostración. Pese a todo, el uso de presentaciones audiovisuales no es la solución perfecta como puede parecer, y es que como ya se ha comentado anteriormente, el uso abusivo de este recurso, puede producir monotonía y aburrimiento de nuevo.

A continuación se adjuntan la presentación a usar en una clase de sucesiones y series de funciones. Se observa que está una transparencia con el título, otra con el índice, luego otra con el apartado de introducción y resultados básicos (recordatorio del capítulo de sucesiones y series numéricas) y finalmente otras dos diapositivas con el apartado 9.2 de series de funciones, pues los resultados son análogos a los de sucesiones de funciones ya hechos en pizarra como 9.1. De este modo se consigue una optimización de tiempo y ni cansar ni aburrir a los alumnos.

Successions i sèries de funcions. Sèries de Fourier.

Joel Saà Seoane

21 d'abril del 2009

9. Successions i sèries de funcions. Sèries de Fourier.

9.0. Introducció

Recordem que al tercer capítol anomenàvem...

- **successió numèrica** a una aplicació de la forma

$$x_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

  i ho denotàvem mitjançant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$.
- **sèrie numèrica** al parell ordenat format per una successió i la seva successió de sumes parcials, i.e. (x_n, s_n) on $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$. A més a més, dèiem que x_n és el terme general de la sèrie i la denotem per $\sum x_n$.

9.2. Sèries de funcions

Anàl·logament definim:

Definition (Sèrie de funcions)

Sigui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions. Considerem $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successió definida com $F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Al parell (f_n, F_n) se l'anomena **sèrie de funcions** de terme general f_n i s'escriu $\sum f_n$. A més a més, F_n s'anomena suma parcial *n-èssima* de $\sum f_n$.

Definition (Convergències)

Sigui $A \subset \mathbb{R}$ i $\sum f_n$ una sèrie de funcions. Sigui F una funció: $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Aleshores direm que $\sum f_n$:

- *convergeix puntualment* a F en $a \in A$ si $F_n \xrightarrow{\text{punt.}} F$ en $a \in A$.
- *convergeix absolutament* a F en $a \in A$ si $\sum f_n$ convergeix puntualment en $a \in A$.
- *convergeix uniformement* a F en A si $F_n \xrightarrow{\text{unif.}} F$ en A.

Joel Saà Càlcul

Per tal de poder demostrar la convergència uniforme d'algunes sèries numèriques sense necessitat de fer ús de la definició, sovint de complicada aplicació, es diposa del següent resultat.

Theorem (Criteri de Weierstrass)

Sigui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions amb $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió numèrica tals que

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$$

Aleshores, si $\sum M_n$ convergeix, $\sum f_n(x)$ convergeix absolutament i uniforme en A.

Per exemple, si volem raonar la convergència de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{2^n}$ tindrem:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{2^n} < \infty$$

Joel Saà Càlcul

Sigui $A \subset \mathbb{R}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions amb $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Sigui també $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Aleshores:

- Continuïtat

$$\left.\begin{array}{r} \sum f_n \xrightarrow{\text{unif.}} F \\ f_n \text{ contínua en } a \in A \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ contínua en } a \in A$$

- Integrabilitat

$$\left.\begin{array}{r} \sum f_n \xrightarrow{\text{unif.}} F \text{ en } A = [a,b] \\ f_n \in \mathcal{R}([a,b]) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow F \in \mathcal{R}([a,b]) \text{ i } \int_a^b = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n$$

- Derivabilitat

$$\left.\begin{array}{r} \sum f_n \xrightarrow{\text{punt.}} F \text{ en } A = (a,b) \\ f_n \text{ derivable en } (a,b) \, \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum f_n' \xrightarrow{\text{unif.}} g \text{ amb } g \in \mathcal{C}^0(a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ derivable en } (a,b) \text{ i } F' = g$$

Joel Saà Càlcul

En definitiva, la solución óptima para la realización de clases será aquella que compatibilice el uso de pizarra y presentaciones audiovisuales, con ciertos intercambios de recurso durante la sesión (aunque tampoco cambiando cada 2 minutos, esto produce una sensación de pérdida de tiempo que tampoco ayuda a la motivación del alumnado).

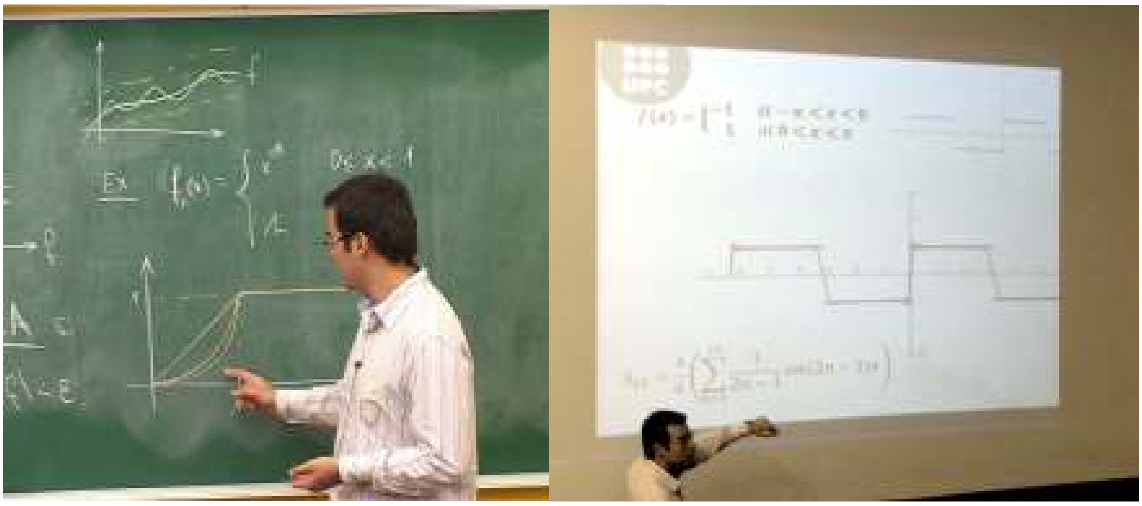


Ilustración 22 - Sesión presencial combinada de pizarra y proyección

Combinar, muy de vez en cuando, algún ejercicio dando tiempo a los alumnos a hacerlo en clase puede ser también un componente motivador más, a usar en clase. También realizar preguntas a los alumnos en clase (siempre sin abusar, pues si no se genera una sensación de tensión continuada, por poder ser preguntado) puede ser un recurso útil, aunque requiere saberse el nombre de los alumnos.

Televoto

Algunos centros disponen ya de un nuevo recurso de gran utilidad para captar la atención y ayudar a motivar al alumno por la asignatura: los dispositivos de votación remota o televoto. Si al inicio de la clase se reparte entre los alumnos un pequeño mando a distancia que está sincronizado con el ordenador proyector de presentaciones, se pueden elaborar algunas preguntas o ejercicios con distintas opciones, que deben ser respondidas por los alumnos mediante el mando. Se trata de un mecanismo similar al conocido 'comodín del público' que aporta, de forma instantánea, de estadísticas sobre los resultados aportados por los alumnos participantes.

Estas sesiones producen intriga en el sí del alumno y generalmente ayudan a que éste gane en motivación. Pueden usarse (es lo más razonable) sólo a nivel orientativo y sin repercusión en la evaluación, simplemente para asegurarse el profesor de que los alumnos van entendiendo lo que se explica; o bien pueden usarse como parte de la evaluación continuada.

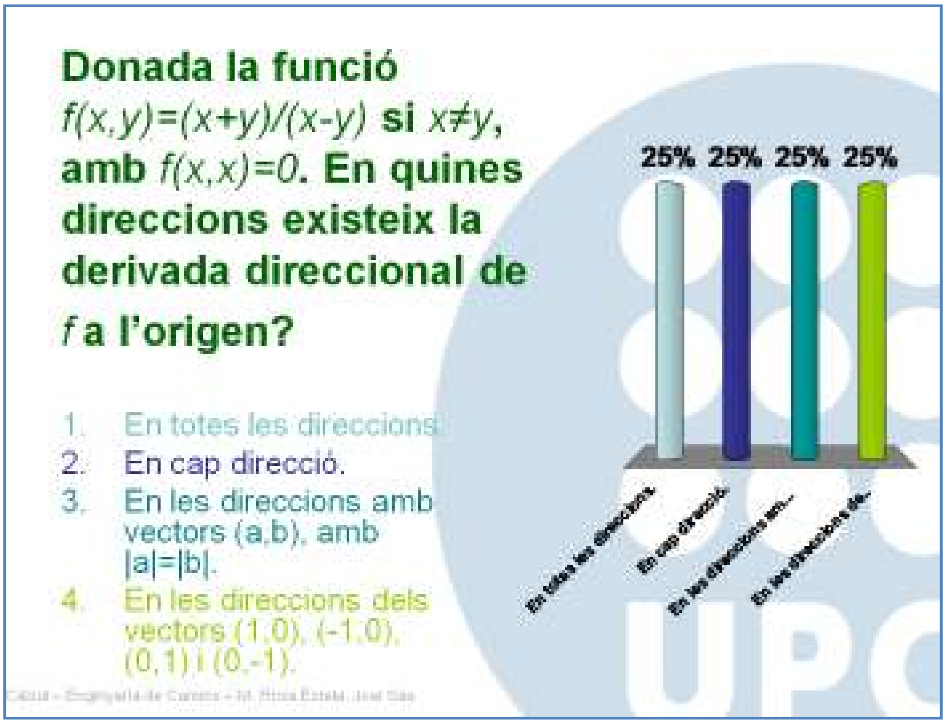


Ilustración 23 - Transparencia ejemplo para la sesión de televoto

Ilustración 24 - Sesión de televoto en aula

El objetivo final acabará siendo el de captar la atención del alumno así como su motivación, y para ello también resulta fundamental el uso de un tono de voz elevado y no especialmente monótono, la notable gesticulación y el cruce de miradas con los alumnos, para parecer en todo momento, cercano al alumno.

6.- Gestión de herramientas posterior a la clase presencial

Llegados a este punto el trabajo todavía no ha terminado. De hecho, éste es uno de los momentos más importantes. En este momento probablemente y si todo ha salido como se había previsto, el alumno ya comprende y domina los conceptos relativos a la sesión que acaba de presenciar y ahora toca corroborarlo. Resulta entonces esencial dotar al alumno de una colección de problemas, ahora sí, de distinta dificultad, para que el alumno ponga a prueba sus conocimientos. Pese a todo, también se debe complementar la docencia presencial con otras herramientas: la colección completa de apuntes y recursos digitales del capítulo tratado en la sesión anterior e incluso, un vídeo que reproduzca la sesión. Estos recursos deben ser analizados particularmente, pues pueden llegar a tener implicaciones negativas y deberemos cuidar su uso.

Colección de ejercicios

La colección de ejercicios propuestos debe contener un número de ejercicios adecuado, eso es, entre 7 y 12 ejercicios por semana, aproximadamente. Un número inferior probablemente no cubra las necesidades del capítulo tratado en la sesión anterior; mientras que un número superior implicará la imposibilidad por parte del alumno de realizarlos todos. Aún así, como siempre existen ciertos alumnos especialmente motivados por esta asignatura en particular, pueden complementarse la colección de problemas con otros tantos, a fin de que no exista la sensación de falta de material docente.

Existe una conocida disyuntiva sobre como aportar las colecciones de problemas. ¿Deben acompañarse los ejercicios de sus resoluciones? La respuesta debería ser negativa, siempre y cuando exista suficiente tiempo en clase para resolver la mayoría de los ejercicios. Sí resulta interesante aportar el valor del resultado, pero no el razonamiento. Si no hay tiempo disponible en clase para resolver los ejercicios, puede aportarse la solución para que el alumno pueda entenderlo y analizarlo. El objetivo será siempre que el alumno pruebe de hacer los ejercicios sin ayuda de la resolución, y una vez realizados, pueda comprobar si ha razonado correctamente o no. Una de las grandes oportunidades que ofrece Moodle está en que podemos tener los ejercicios subidos a la plataforma con enunciado y resolución, y activar sólo el enunciado o ambos enunciado y resolución en función de los ejercicios que se hayan resuelto en clase. Jamás podríamos seguir una gestión así en papel.

Suele ser recomendable acompañar las colecciones de problemas de ciertos ejercicios complementarios de mayor dificultad, por ejemplo, ejercicios de pasados exámenes, para que el alumno sea consciente, en todo momento, de hasta dónde debe dominar la materia. Éstos sí que pueden ir o no acompañados de su resolución según criterios del profesor, aunque probablemente sea óptimo aportar la resolución.

Veamos a continuación un par de ejercicios propuestos para el capítulo de funciones de varias variables. Observamos un link (activado en este caso) a las resoluciones de los mismos.

Ejercicio

Sea $f(u,v,w)=u^2+v^2-w$, donde $u(x,y,z)=x^2y$, $v(x,y,z)=y^2$ y $w(x,y,z)=e^{-xz}$.

1. Usando la regla de la cadena, calcular $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ y $\frac{\partial h}{\partial z}$ siendo $h=f(u,v,w)$.
2. Obtener la expresión de la función h dependiente de las variables x, y y z.
3. Obtener las derivadas parciales de la función h directamente a partir de la expresión obtenida en la apartado b).

Solución 5.12.8.

Ejercicio

Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} e^t - x^2 + y^2 = 1 \\ t - xy = 1 \end{cases}$$

define implícitamente dos funciones $x=x(t)$, $y=y(t)$ en un entorno del punto $(t,x,y)=(0,-1,1)$.

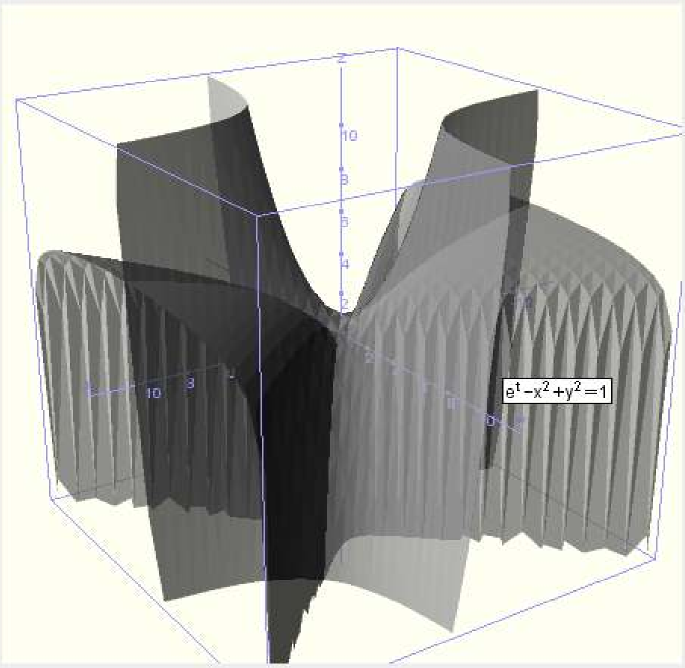


Figure 5.48: Visualización superficies

Solución 5.12.9.

Ilustración 25 - Varios ejercicios propuestos relativos al capítulo de funciones de varias variables

Cuyas resoluciones podemos abrir mediante los vínculos que se indican obteniendo, respectivamente, dos ventanas como las siguientes.

Solución 5.12.8.

Solución

a) Dada la función $h(x,y,z)=f(u,v,w)=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$ observamos como dependen unas variables de las otras. El siguiente esquema muestra los "caminos" que relacionan f con las diferentes variables:

$$\underbrace{\underbrace{xyz}_{u}\underbrace{xyz}_{v}\underbrace{xyz}_{w}}_{f}$$

Si queremos la derivada parcial de la función compuesta respeto x, como regla práctica por utilizar la regla de la cadena debemos seguir los caminos que acaban en x y sumarlos:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=2u\cdot 2xy+2v\cdot 0+(-1)\cdot(-ze^{-xz})=4uxy+ze^{-xz}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=2u\cdot x^2+2v\cdot 2y+(-1)\cdot 0=2ux^2+4vy$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=2u\cdot 0+2v\cdot 0+(-1)\cdot(-xe^{-xz})=xe^{-xz}$$

Entonces, en lugar de u, v y w escribimos sus expresiones en función de x, y y z:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=4(x^2y)xy+ze^{-xz}=4x^3y^2+ze^{-xz}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=2(x^2y)x^2+4y^3=2x^4y+4y^3$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=xe^{-xz}$$

b) Por obtener la expresión de la función h en función de las variables x, y y z sustituiremos directamente:

$$h(x,y,z)=f(u,v,w)=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))=(x^2y)^2+(y^2)^2-e^{-xz}=x^4y^2+y^4-e^{-xz}$$

c) Con las reglas de derivación habituales calcularemos las derivadas parciales de la función h:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=4x^3y^2+0-(-z)e^{-xz}=4x^3y^2+ze^{-xz}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=x^4 2y+4y^3+0=2x^4y+4y^3$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=xe^{-xz}$$

que coinciden con las funciones derivadas encuentros en el apartado a).

Ilustración 26 - Resolución del ejercicio 5.12.8.

Solución 5.12.9.

Solución

El sistema dado define la curva intersección de las dos superficies que visualiza la figura 5.48. Debemos demostrar que esta curva $C \subset \mathbb{R}^3$ puede definirse como $r(t) = (t, x(t), y(t))$, es decir, podemos obtener una parametrización de la misma.

Calcular la variación de $f(t,x,y) = txy - x + y$ en su punto $(0,-1,1)$ sobre C.

Comprobamos si se cumplen las tres condiciones del teorema de la función implícita.

- $f = (f_1, f_2) \in C^\infty$ siendo

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t,x,y) = e^t - x^2 + y^2 - 1 \\ f_2(t,x,y) = t - xy - 1 \end{array}\right]$$

- $f(0,-1,1) = (0,0)$

- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x & 2y \\ -y & -x \end{vmatrix}_{(0,-1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Se cumplen las condiciones; por lo tanto podemos escribir $x = x(t), y = y(t)$ en un en torno al punto $(0,-1,1)$

Dada $C = r(t) = (t, x(t), y(t))$ vamos a calcular la variación de $f(t,x,y) = txy - x + y$ a $(0,-1,1)$ sobre C, que como f es una función diferenciable podemos calcular cómo

$$\text{Variación} f_C = \nabla f(0,-1,1) \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

$$\nabla f(0,-1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,-1,1)} = (xy, ty-1, tx+1)_{(0,-1,1)} = (-1,-1,1)$$

Como $r'(t) = (1, x'(t), y'(t))$ vamos a calcular $x'(t)$ y $y'(t)$

De

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t, x(t), y(t)) = 0 \\ f_2(t, x(t), y(t)) = 0 \end{array}\right]$$

tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} e^t - (x(t))^2 + (y(t))^2 = 1 \\ t - x(t)y(t) = 1 \end{array}\right]$$

Si derivamos respeto t:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} e^t - 2x\frac{\partial x}{\partial t} + 2y\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ 1 - y\frac{\partial x}{\partial t} - x\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{array}\right]_{(0,-1,1)} \quad \left.\begin{array}{l} 1 + 2\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ 1 - \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x'(0) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y'(0) = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto $r'(0) = \left(1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

$$\|r'(0)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{26}{16}} = \frac{\sqrt{26}}{4}$$

De dónde

$$\text{Variación} f_C = \nabla f(0,-1,1) \frac{r'(0)}{\|r'(0)\|} = (-1,-1,1) \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = \frac{-4}{\sqrt{26}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{-3}{\sqrt{26}} = \frac{-8}{\sqrt{26}}$$

Ilustración 27 - Resolución del ejercicio 5.12.9

Acompañar también las colecciones de problemas en su versión digital de ejercicios y laboratorios interactivos resulta de gran vistosidad para el alumno. Es decir, si el lector se encuentra, de vez en cuando, un ejemplo interactivo probablemente sí sienta atracción por resolverlo; además, si se trata de un laboratorio, en el que él o ella deben aportar parte del enunciado y resolverlo, probablemente sienta las ganas necesarias para llevarlo a cabo.

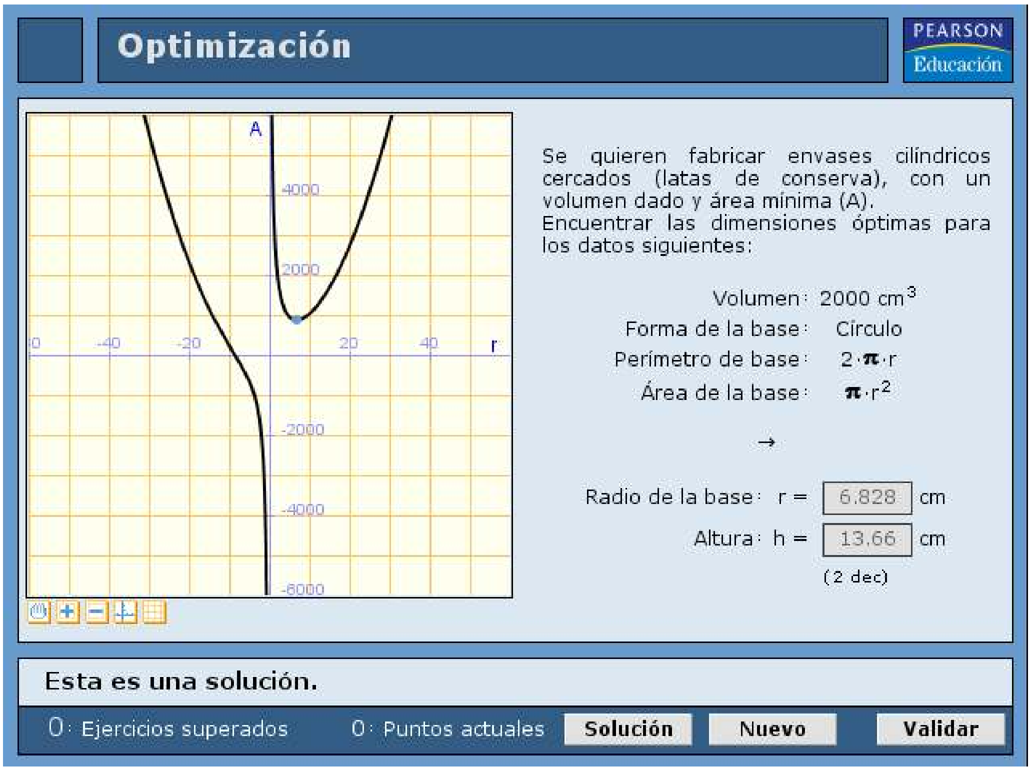


Ilustración 28 - Ejemplo de ejercicio interactivo correspondiente al capítulo de varias variables

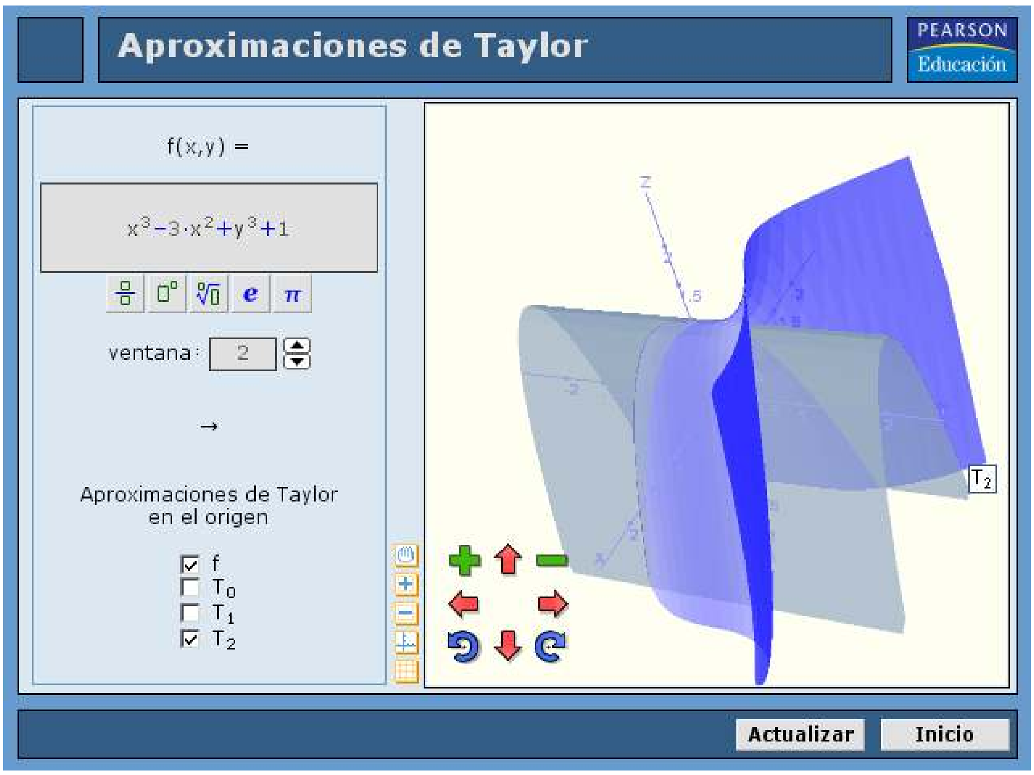


Ilustración 29 – Laboratorio interactivo para el capítulo de funciones de varias variables

Como colección complementaria de ejercicios se proponen unos cuantos problemas de exámenes de años pasados. Veamos un par de ejemplos de la versión *.pdf del recurso que se cuelga en la plataforma. Las resoluciones se facilitarían aparte, según interese.

Ejercicio 5.13.5. *Estudiar la continuidad de la función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en todos los puntos de su dominio, siendo*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(e^y-1)}{\sin y} & y > 0 \\ \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & y \leqslant 0,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicio 5.13.6. *Indicar el dominio y estudiar la continuidad de las funciones reales de variable vectorial $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por*

$$a)\ f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

$$b)\ g(x,y) = \frac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2}$$

Ejercicio 5.13.7. *Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} & |x| \neq |y| \\ 0 & |x| = |y| \end{cases}$$

Ejercicio 5.13.8. *Consideramos $f : [0,\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{\sin x} & x \neq 0 \\ y \ln |y| & x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función f.

Ejercicio 5.13.9. *Estudiar la existencia del límite en el punto $(0,0)$ y definir, si es posible, la extensión continua a todo $\mathbb{R}^2$ de la función $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{x(1-\cos y)}{x^2+y^2}$$

Ejercicio 5.13.10. *Sea la función*

$$f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(e^{x+y}-1)}$$

Estudiar el dominio de la función y definir, si es posible, una extensión continua de f a todo $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 5.13.11. *Dada la función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2-xy}$$

Estudiar la existencia del límite de f en el punto $(0,0)$ y ,si es posible, definir una extensión continua de la función.

Apuntes docentes

Uno de los puntos más importantes en el proceso de docencia está en la elaboración de una colección de apuntes para seguir los contenidos teóricos de las clases. Los apuntes deben ser un texto extenso, ameno para el lector y riguroso en sus contenidos. Al mismo tiempo, deben contener todos los contenidos necesarios para el correcto seguimiento de la asignatura. De alguna manera, deben ser como la adaptación de un libro a los contenidos propios de la asignatura en cuestión.

El mejor de los métodos de divulgación de apuntes no dejará de ser, nunca, la versión en papel o en *.pdf del texto, ya que para la correcta lectura suele ser incómodo realizarla por pantalla. Pese a ello, una vez elaborados los contenidos (si se han hecho en TeX especialmente) no resultará difícil traspasarlos a una versión digital en Moodle. Al mismo tiempo, disponer de los apuntes en versión Moodle puede resultar útil para completar el glosario y por tanto, facilitar la respuesta de consultas puntuales, que pueden llegar a ser complicadas de localizar en un libro o versión en papel dada su extensión.

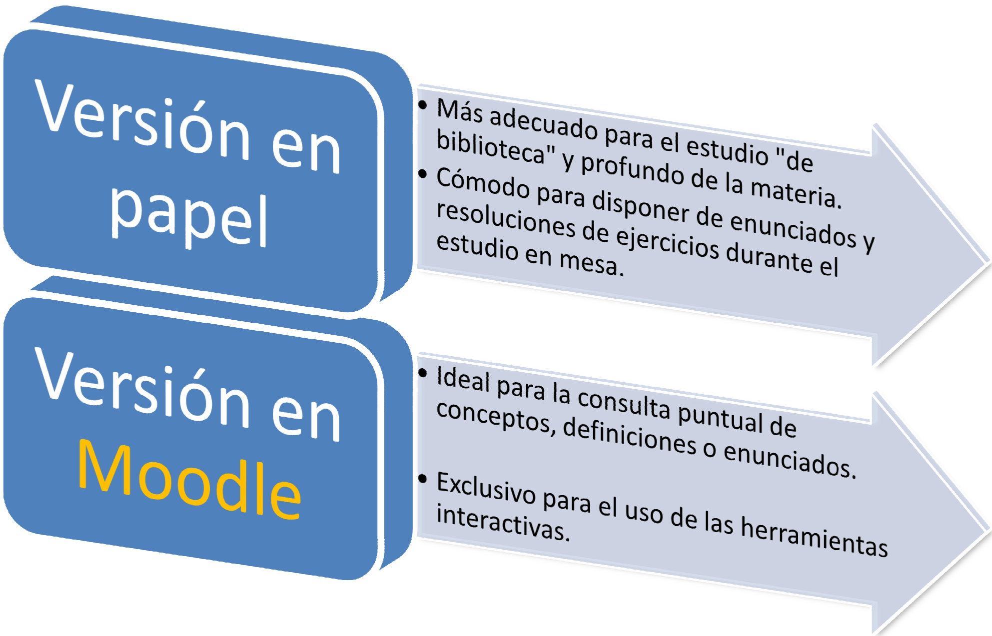


Ilustración 30 - Propiedades de los distintos tipos de formato de apuntes

La versión en papel puede ser más o menos extensa según sea el capítulo que estamos tratando, pero en cualquier caso resultará de esencial ayuda para el estudio del alumno. Por ejemplo para una primera lección de teoría de números se facilitaría al alumno el material que encontramos en las próximas páginas como apuntes en versión en papel. Sólo se adjuntan los apuntes relativos a la introducción de la sesión (ese material de motivación del que hablábamos anteriormente) y el primer punto de números naturales, enteros y racionales. Véase el curso digital adjunto para poder visualizar el capítulo al completo, incluyendo también los apartados más relevantes de números reales y números complejos.

Números reales y complejos

No sorprende que un primer capítulo de un libro de Cálculo estudie los números reales, sin embargo, muchos estudiantes creen no tener que profundizar en dichos números por saberlos conocidos. Veamos a continuación un par de resultados curiosos.
Se cumple,

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

y por cumplir la propiedad asociativa las operaciones suma y resta, podemos escribir:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots \end{aligned}$$

Luego $0 = 1$!
Supongamos ahora a y b números reales tales que $a > b$ y sea c su diferencia, de forma que $a = b + c$. Si multiplicamos los dos miembros de la igualdad por $a - b$ obtenemos:

$$a(a-b) = (b+c)(a-b)$$

de donde se deduce

$$\begin{gathered} a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \\ a(a-b-c) = b(a-b-c) \end{gathered}$$

y simplificando, se obtiene $a = b$!
Existen varias formas de introducir el cuerpo de los números reales, entre las que se encuentran el método de las cortaduras de Dedekind y el método de Cantor, que utiliza el conjunto de las sucesiones de Cauchy de números racionales. Los dos son métodos constructivos y prueban la unicidad del cuerpo de los números reales construido. Sin embargo, el estudio que se adopta en este libro no es constructivo. Introducimos el cuerpo de los números reales axiomáticamente.
Resaltamos el axioma del supremo como el resultado más importante del análisis real, pues de él se deducen las propiedades de ser cuerpo ordenado arquimedianamente y la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

1.1. Números naturales, enteros y racionales

Los conjuntos numéricos básicos para una buena comprensión de este texto, y en general de las matemáticas, son los números naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$), reales ($\mathbb{R}$) y finalmente los números complejos ($\mathbb{C}$). Tal como los hemos mencionado, cada uno de estos conjuntos contiene al anterior, es decir,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Designamos con la letra $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Este conjunto tiene una cantidad infinita de elementos y es el conjunto de números que nos permite contar y enumerar las cosas. De él se deriva el importante concepto de numerabilidad.
Una de las características básicas de los números naturales es el "principio de inducción", método que permite demostrar una determinada propiedad que hace referencia a los números naturales.
Para demostrar que una proposición $P(n)$ es cierta para cualquier número natural ($\forall n \in \mathbb{N}$), el principio de inducción afirma que:

1. Si $P(1)$ es cierto
2. Si para $n = k$, $P(k)$ es cierto (hipótesis de inducción), entonces $P(k+1)$ es cierto

entonces $P(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.1. *Demostrar que*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$$

Demostración

1. Si $n = 1$, se cumple $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$
2. Supongamos que se cumple para $k = n - 1$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

(hipótesis de inducción) y queremos demostrar que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n =$$
$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\square$

Algunos autores consideran $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y expresan $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, notación habitual cuando se excluye el cero de un conjunto.

Podemos observar que el conjunto de números naturales no tiene estructura de grupo con las operaciones habituales de suma y producto ya que no existe el opuesto por la suma o por el producto de un número natural. Al final del estudio de los conjuntos numéricos, encontraremos un conjunto que, además de tener estructura de grupo, anillo o cuerpo con ciertas operaciones, nos asegure la existencia de soluciones de una ecuación polinómica cualquiera con coeficientes en dicho conjunto. Lo que se llama ser un cuerpo algebraicamente cerrado, es decir, que todo polinomio a coeficientes en ese cuerpo, tenga todas sus soluciones en ese mismo cuerpo. Ésta situación se dará en el conjunto de los números complejos, pero vayamos paso a paso.

En el conjunto de los números naturales ni siquiera podemos resolver una ecuación tan sencilla como

$$x + 4 = 0$$

ya que su solución $x = -4$ no pertenece a $\mathbb{N}$. Ampliemos pues este conjunto de números incluyendo también los negativos, es decir, para cada número natural añadimos su inverso por la suma. Tenemos el conjunto de los números enteros. Denotaremos mediante la letra $\mathbb{Z}$ al conjunto de números enteros, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Si nos fijamos, este conjunto ya contiene elemento inverso con la operación suma. También verifica la propiedad asociativa e incluso la conmutativa. Dispone también de un elemento neutro como es el cero, para esta operación. En definitiva, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano o conmutativo. Este grupo toma especial importancia en toda la teoría de grupos y anillos así como en la teoría de Galois pero no es algo que se deba ver aquí. Pese a lo que se consigue con este nuevo grupo, todavía no tenemos suficiente ya que, ¿qué pasa si queremos resolver la ecuación siguiente?

$$3x + 2 = 0$$

los coeficientes de la ecuación son números enteros, pero en cambio, su solución es $x = -2/3$ que no es un elemento entero. Entonces, todavía no tenemos suficiente con los números enteros, debemos incluir también, de algún modo, todo tipo de fracciones posibles. Definimos a continuación el conjunto de los números racionales, que se denotará por $\mathbb{Q}$ y que incluye a todos los elementos de la forma siguiente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ \text{donde } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Fijémonos que consideramos que el término del numerador aporta el signo, por ello le permitimos ser de $\mathbb{Z}$ y en cambio el denominador lo fijamos como positivo (esto podría ser al revés o incluso permitiendo que ambos términos fuesen de $\mathbb{Z}$) pero eso sí, no podemos permitir que el denominador se anule ya que el conjunto no estaría bien definido en ese caso. Además tenemos muchos números repetidos por lo que tenemos que identificar todos aquellos que sean el mismo como un sólo número.

Propiedad Caracterización de $\mathbb{Q}$
$\forall p \in \mathbb{Q} \quad \exists m, n \in \mathbb{Z}$ con $m.c.d(m,n) = 1$ y $p = \frac{m}{n}$

El conjunto de números racionales puede parecer mucho mayor que el de números naturales pero no deja de ser equipotente con éste, es decir, de tener un número infinito de elementos del mismo orden: numerable. En el capítulo siguiente, en el ejemplo 2.4.14 de la página 75 veremos una demostración de que esto es así.
En el conjunto de los números racionales ya tenemos soluciones para todo tipo de ecuaciones lineales o de grado uno, sí. Pero, ¿tenemos también todas las soluciones de las ecuaciones de grado superior? La respuesta es negativa. Si queremos resolver, por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 2 = 0$$

tenemos que su solución es $x = \pm\sqrt{2}$ que no es un número que se pueda expresar como una fracción de números enteros de forma exacta. Veamos que efectivamente, no es un número racional. Demostraremos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demostración Procederemos por reducción al absurdo. Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ entonces

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Pero entonces tenemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ es par}$$

De modo que entonces p también será par y podremos escribirlo como $p = 2r$ para algún $r \in \mathbb{Z}$, pero $2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q^2$ será par con lo que q también será par, pero entonces el cociente entre p y q no sería irreductible al tener ambos, denominador y numerador, múltiplos de 2. $\square$

Se definen a continuación los números reales, conjunto que incluye todos los números que no se puedan escribir como fracción de dos enteros. Este conjunto numérico merece una sección propia.

Además de todo esto, resulta imprescindible disponer de la versión Moodle de los apuntes si se quieren ir intercalando ejemplos y gráficos interactivos y virtuales. Resulta imposible adjuntar animaciones en una versión en papel y por tanto necesitaremos de los recursos de la plataforma para completar de forma óptima nuestra colección de apuntes. Invitamos al lector a visitar la página de la plataforma propuesta y adjunta a este texto para poder hacerse una idea verdadera del estilo final de los contenidos teóricos que se pueden encontrar en la plataforma. A nivel de ejemplo y para seguir con el mismo capítulo del justamente tratado adjuntamos la visualización de una pequeña parte del apartado de números reales del mismo capítulo, referente a la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

por lo tanto,

$$\{x \in \mathbb{R} : |3x+5| \geq 2\} = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1, +\infty)$$

Finalmente enunciamos y demostramos la desigualdad de Cauchy-Schwarz que será el resultado más fundamental a nivel topológico y de conjuntos en el conjunto de los números reales. Servirá para demostrar la desigualdad triangular de distancias y otros resultados similares.

Propiedad (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Se cumple

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Hay igualdad si $\lambda = -\frac{b_k}{a_k} \forall k = 1, \ldots, n$.

Demostración 1.2.6.

Demostración 1.2.6.

Demostración

Para cualquier número real x se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 x^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0$$

Si $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$, es decir, existe algún $a_k \neq 0$, tomamos $x = -\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ y substituyendo en la igualdad tenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0$$

como queríamos demostrar.

Si $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$, eso implica $a_k = 0 \, \forall k = 1, \ldots, n$. En este caso, la igualdad es trivial.

Ilustración 31 - Desigualdad de Cauchy-Schwarz en versión Moodle

Grabación de clases en vídeo

Otra magnífica posibilidad que ofrecen las nuevas tecnologías para una máxima calidad de la docencia posterior a las sesiones presenciales son los vídeos. Es decir, si se dispone de grabaciones en vídeo de las distintas clases en el aula, se pueden poner a disposición del alumno, fácilmente, a través de la plataforma virtual del curso, de manera que así, el alumno puede consultar o incluso revisualizar la sesión si ésta no había quedado del todo clara. Además, se abre así la posibilidad de ofrecer las sesiones de clase a aquellos alumnos que por uno u otro motivo no haya podido asistir a clase.

Esta metodología tiene una contraindicación que se percibe de forma inmediata. Y es que si los alumnos pueden ver la clase desde su propio ordenador en casa, ¿Por qué van a ir a clase? Es decir, se puede entender que habrá una reducción notable de la asistencia a clase. Eso es indudable e inevitable, aún así, existen algunas metodologías para evitar estos hechos y conseguir que estas sesiones en vídeo sirvan, únicamente, a modo de consulta o revisión de la clase en el caso de no haberla entendido: asistencia obligatoria a clase o sencillamente y gracias a las posibilidades que ofrece Moodle, permitir el acceso al vídeo sólo a aquellos estudiantes que el profesor decida, eso es, a los que hayan asistido a la sesión o no lo hayan podido hacer de forma extraordinaria y justificada. El procedimiento es sencillo y se basa en la limitación de los usuarios que pueden acceder al vídeo. La realidad es que esta es una buena solución, pues los estudiantes no se pasan las contraseñas del campus entre ellos (se la juegan en múltiples asignaturas) y tampoco será habitual que uno se descargue el vídeo y lo pase a otro vía internet, pues estos tienen un tamaño considerable y de difícil o imposible manejo para el intercambio de archivos.

Lo que sí está claro es que este recurso ofrece un nuevo horizonte de posibilidades, incluso se ocurren ideas tan lúcidas como las de acompañar a los folletos de motivación de un capítulo y a los ejercicios de motivación previos a la clase presencial de un corto vídeo de unos 5 o 10 minutos que explique cuestiones interesantes relacionadas con dicho tema. También se ocurre la posibilidad de colgar sesiones posteriores, en la fase tras la sesión presencial, más o menos largas sobre aplicaciones interesantes de cada capítulo, y el alumno percibir que ha aprendido y las posibilidades que se le abren al dominar dicho capítulo. En definitiva, es un recurso óptimo a utilizar, aunque siempre debemos ser cautos para no fomentar el pasotismo y la ausencia de alumnos en clase. Como ya hemos destacado anteriormente en muchos otros aspectos, todo debe ser usado en su justa medida, pues un exceso resultaría contraproducente.

Entrando más en materia y cuestión de qué deben contener dichos vídeos debe tenerse siempre presente que las clases deben tener, en todo momento, un componente de dinamismo lo más alto posible. Eso se consigue intercambiando momentos de pizarra, con pequeños ejercicios interactivos vía proyector y resúmenes o recordatorios de conceptos teóricos o ejercicios sencillos mediante una presentación proyectada. Todo eso se puede percibir de forma exacta en el vídeo que adjuntamos a continuación en forma de capturas y que se puede hallar en el capítulo correspondiente de la versión en Moodle del curso.

Se trata de una sesión de dos horas de duración, con un descanso intermedio de veinte minutos que conforman un vídeo de alrededor de 100 minutos. El capítulo mostrado es el referente a sucesiones y series de funciones así como a series de Taylor y Fourier. Se puede observar en las capturas que siguen así como en la versión vídeo disponible como se van interactuando los distintos métodos docentes: se empieza con un breve recordatorio de conceptos anteriores ya vistos mediante una corta presentación proyectada, se sigue con el desarrollo teórico de los conceptos de sucesiones de funciones en pizarra, dada su novedad e importancia hasta llegar a poco antes de la pausa, que se alcanza con unos minutos finales en los que se muestran y se enseña al alumno a visualizar los conceptos tratados mediante ejemplos y laboratorios interactivos totalmente disponibles para ellos tras la clase. Posteriormente se resume vía proyección el apartado de series de funciones, pues la teoría es análoga a la de sucesiones de funciones, aunque debe adaptarse. El tramo final de clase se enfoca con el desarrollo de las series de Taylor y series de Fourier, mostrando además la visualización del desarrollo de las series de Fourier de modo interactivo también.

Resulta de especial utilidad visualizar esta sesión a fin de percibir el contexto general de novedades que proponemos ir introduciendo en los métodos docentes en la universidad y especialmente para el caso de asignaturas de un ámbito matemático.

Ilustración 32 – Desarrollo de una sesión de clase presencial (1)

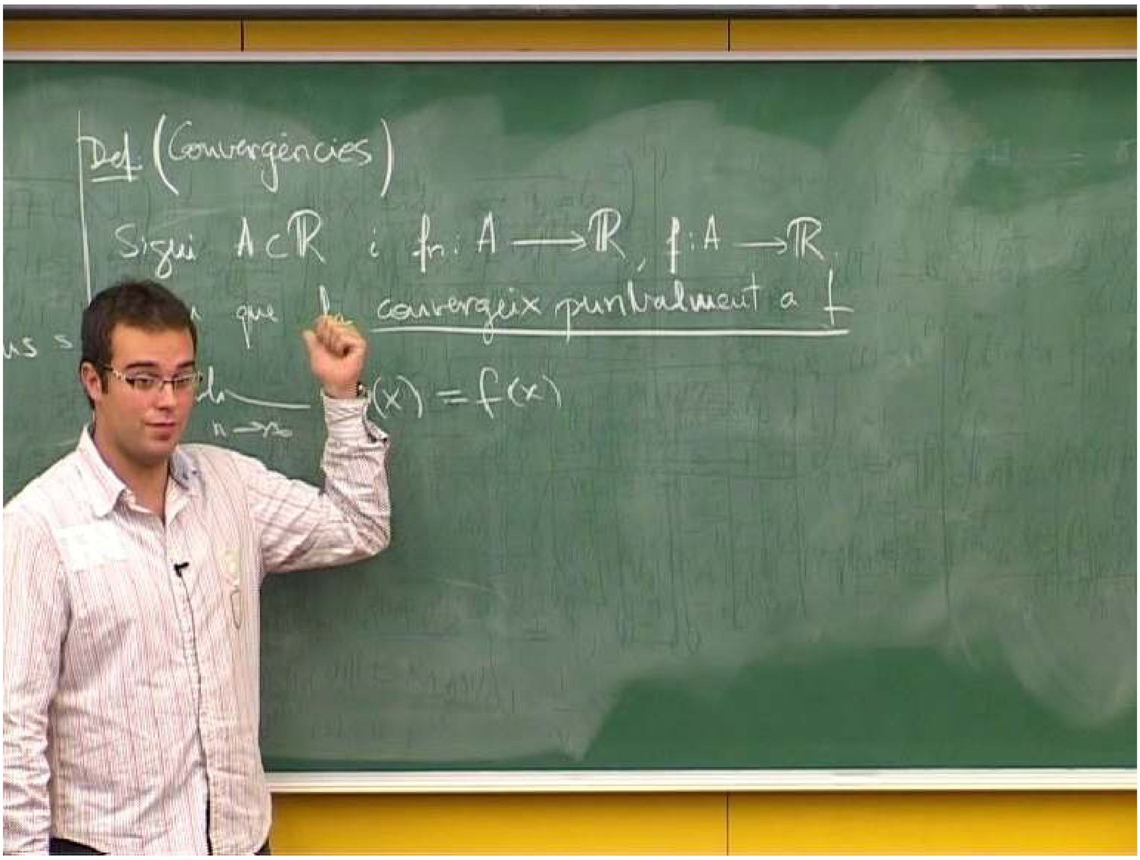
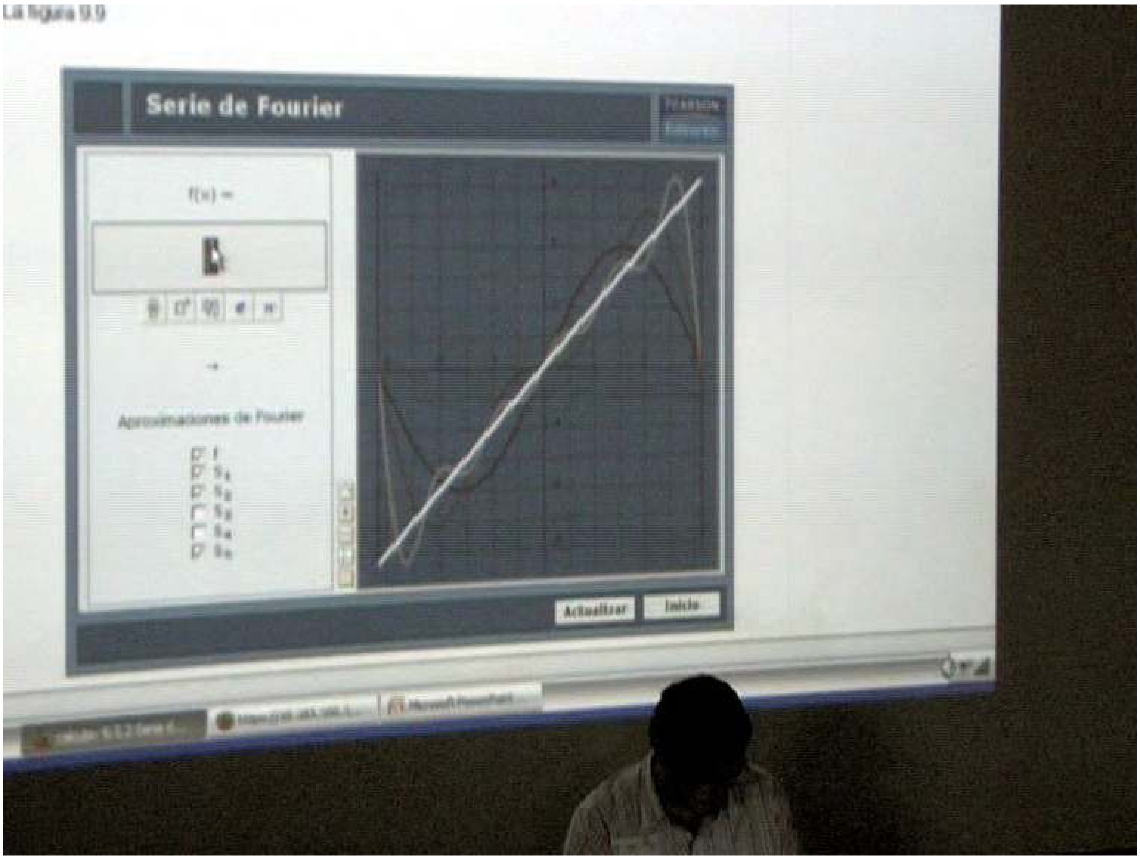


Ilustración 33 - Desarrollo de una sesión de clase presencial (2)



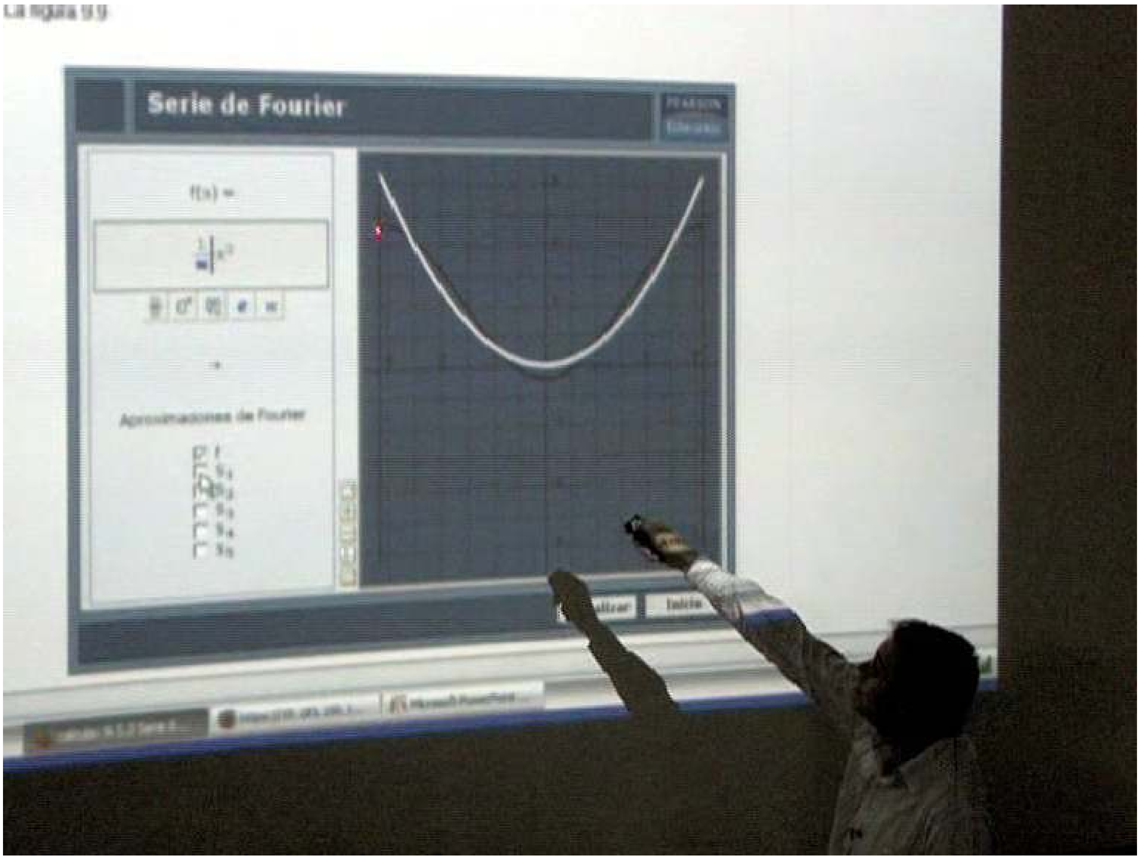


Ilustración 34 - Desarrollo de una sesión de clase presencial (3)

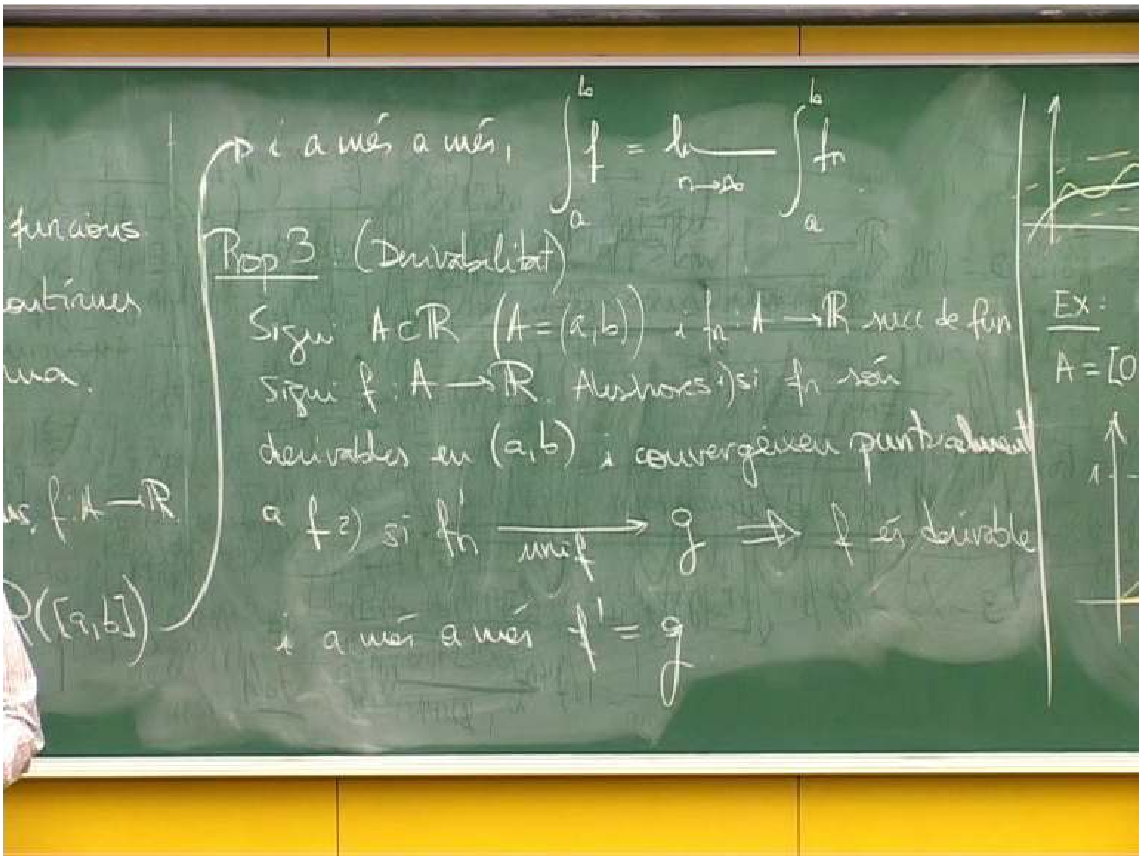


Ilustración 35 - Desarrollo de una sesión de clase presencial (4)

7.- Evaluación de la asignatura

La metodología de evaluación de una asignatura puede verse desde varios puntos de vista. Eso sí, teniendo en cuenta todos los métodos docentes introducidos en este texto, sería lógico dar cierta importancia a la evaluación mediante estos métodos. La evaluación puede depender, básicamente, de si la asignatura es de docencia cuatrimestral o anual.

Para una asignatura de universidad cualquiera, con docencia repartida en un curso anual, como es el caso del Cálculo para los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos en Barcelona, resulta razonable pensar en un examen parcial en enero y otro en mayo, así como proponer la opción de aprobar la asignatura mediante un examen final único en el mes de junio.

La solución propuesta aquí no es única ni necesariamente la más adecuada a todos los cursos que uno pueda imaginar, aún así, creemos que es la más acertada dados los contenidos desarrollados. Llamemos P1 a la nota obtenida, sobre 10, en el examen parcial de enero, correspondiente al temario del primer cuatrimestre: introducción a los números reales y complejos, topología, sucesiones y series numéricas, continuidad de funciones reales de variable real, derivabilidad de funciones reales de variable real e introducción al cálculo de límites en funciones reales de variable vectorial. Llamemos también P2 a la nota, sobre 10, correspondiente a la evaluación del segundo examen parcial de mayo, correspondiente al temario exclusivamente del segundo parcial: continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables, integración de Riemann simple y múltiple, cálculo de primitivas y sucesiones y series de funciones. Finalmente llamemos F1 y F2 a la nota correspondiente a los exámenes finales de mayo y junio respectivamente, correspondientes a toda la materia docente del curso. Entonces, si EC es la nota, sobre 10, de la evaluación continuada, la nota final de la asignatura, la calcularíamos mediante la siguiente sencilla fórmula:

$$Nota = máx\{0.3P1 + 0.3P2 + 0.5EC; 0.5F1 + 0.5AC;\ F2\}$$

Con P1≥4 y P2≥4. Es decir, se pretende que la asignatura se apruebe mediante los dos exámenes parciales y en ese caso, se premia al alumno con un promedio de la asignatura sobre 11 puntos en lugar de 10, al puntuar sobre 3 cada uno de los exámenes parciales y sobre 5 la evaluación continuada. Si el alumno tiene un mal día en el examen parcial de enero, no pierde la convocatoria de mayo y puede presentarse a un primer final, que promedia con la evaluación continuada. En el caso en que el alumno no tenga ni la más remota intención de realizar un seguimiento continuado de la asignatura o bien que su nota EC sea especialmente baja por algún otro motivo, puede también examinarse de un segundo final en el mes de junio, que será la nota definitiva de la asignatura.

Considerando el carácter anual de la asignatura, sin duda será la mejor manera para aprobarla el seguir durante todo el curso sus evaluaciones y tratar de aprobar mediante parciales, y si hubiese mala suerte en éstos, mediante el primer final; pues lógicamente F2 deberá tener una dificultad ligeramente superior para asegurarse el profesor que quien apruebe merece aprobar la asignatura. Tengamos en cuenta que puede presentarse un alumno que no haya aparecido por clase ni por las correspondientes evaluaciones continuadas hasta la fecha.

Para el caso de una asignatura con docencia cuatrimestral, como puede serlo, por ejemplo, la asignatura Cálculo en una variable correspondiente al grado en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas y Estadística, pueden adaptarse todos los contenidos aquí descritos aunque eso sí, modificando ligeramente el procedimiento de evaluación y asignación de pruebas y exámenes. Para ese caso, la evaluación se llevará a cabo, principalmente basada en un examen final aunque pueda existir el apoyo de un examen parcial, que no elimine materia dada la compacidad del curso. Con eso tendremos una nota P correspondiente al examen parcial, una nota EC correspondiente a la evaluación continuada y una nota F para el examen final de cuatrimestre, todas ellas sobre 10. La nota final de la asignatura podrá obtenerse sencillamente a partir de la siguiente formulación:

$$Nota = máx\{0.6(0.25P + 0.75F) + 0.5EC; 0.5F + 0.5AC\}$$

Si además la titulación ofrece la posibilidad de una repesca, como es el caso del grado en matemáticas, los alumnos que no hayan superado así la asignatura, pueden acudir a un examen final de nota única y absoluta sobre 10 en el mes de julio.

Evaluación continuada

Como hemos visto en la introducción de esta sección sobre evaluación de la asignatura de Cálculo, la evaluación continuada aporta una componente relevante e importante de la cuantía de la nota total de la asignatura, unos 5 puntos sobre 10 o sobre 11. Es por ello que existen dos hipótesis que debemos siempre verificar: controlar totalmente la eficacia de estas pruebas y desarrollar una biyección adecuada entre las pruebas de evaluación continuada y el temario de la asignatura.

Debemos asegurarnos de que estas pruebas reflejan de forma cierta los conocimientos de los alumnos, es decir, por un lado que no son especialmente sencillas pero sobretodo, que no se les permite copiar entre unos y otros aunque sí cooperar. La distinción entre cooperar y copiar es demasiado complicada y es por ello que, especialmente para grupos de alumnos bastante numerosos (más de 30) resulta imposible el asignar pruebas de evaluación continuada para hacer en casa o como deberes. En este caso, deben asignarse ejercicios en horas de clase o en horas pensadas para estar en aula y es ahí donde aparece toda la casuística analizada.

Se puede pensar inmediatamente en tres modos de evaluación continuada dadas las características del curso que hemos desarrollado. El primer método, aunque clásico, no deja de ser eficaz y una de las mejores maneras de medir los conocimientos de los alumnos. Se trata de realizar en clase un ejercicio puntuable cada cierto tiempo, digamos uno cada tema, aproximadamente. No tiene la presión de un examen al ser sólo un ejercicio y además, durar aproximadamente media hora y sí da la confianza al alumno de poder obtener una buena nota si éste estudia, hecho bastante factible al sólo arrastrar un tema y no todo el cuatrimestre como en el caso de los exámenes. Estos ejercicios puntuables pues se pueden repartir en clase de problemas de la asignatura cada dos o tres semanas a fin de poder comprobar el seguimiento del alumno. La corrección suele ser relativamente rápida y se les facilita la nota mediante el recurso de CALIFICACIONES en el curso virtual de Moodle. Un ejemplo de ejercicio puntuable podría ser el siguiente, correspondiente al tema de derivabilidad de funciones de una variable.

Problema 2. Deducir el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = 2^x$ para un entorno del punto $x = 0$.

Inmediatamente después de haber realizado el ejercicio se les cuelga y aporta la solución a fin que analicen sus razonamientos. No olvidemos que el objetivo es que los alumnos aprendan Cálculo. Es decir, se cuelga un archivo como el que sigue.

Problema 2. Deducir el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = 2^x$ para un entorno del punto $x = 0$.

Sabemos la expresión general del polinomio de Taylor de una función $f(x)$ en el entorno de un punto a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a)$$

donde $R_n(x,a)$ es el resto de Lagrange y tiene una expresión de la forma

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde t pertenece al intervalo de extremos a y x.
Podemos observar que

$$2^x = e^{x \ln 2}$$

y como sabemos que la expresión del polinomio de la función exponencial en el entorno del origen es

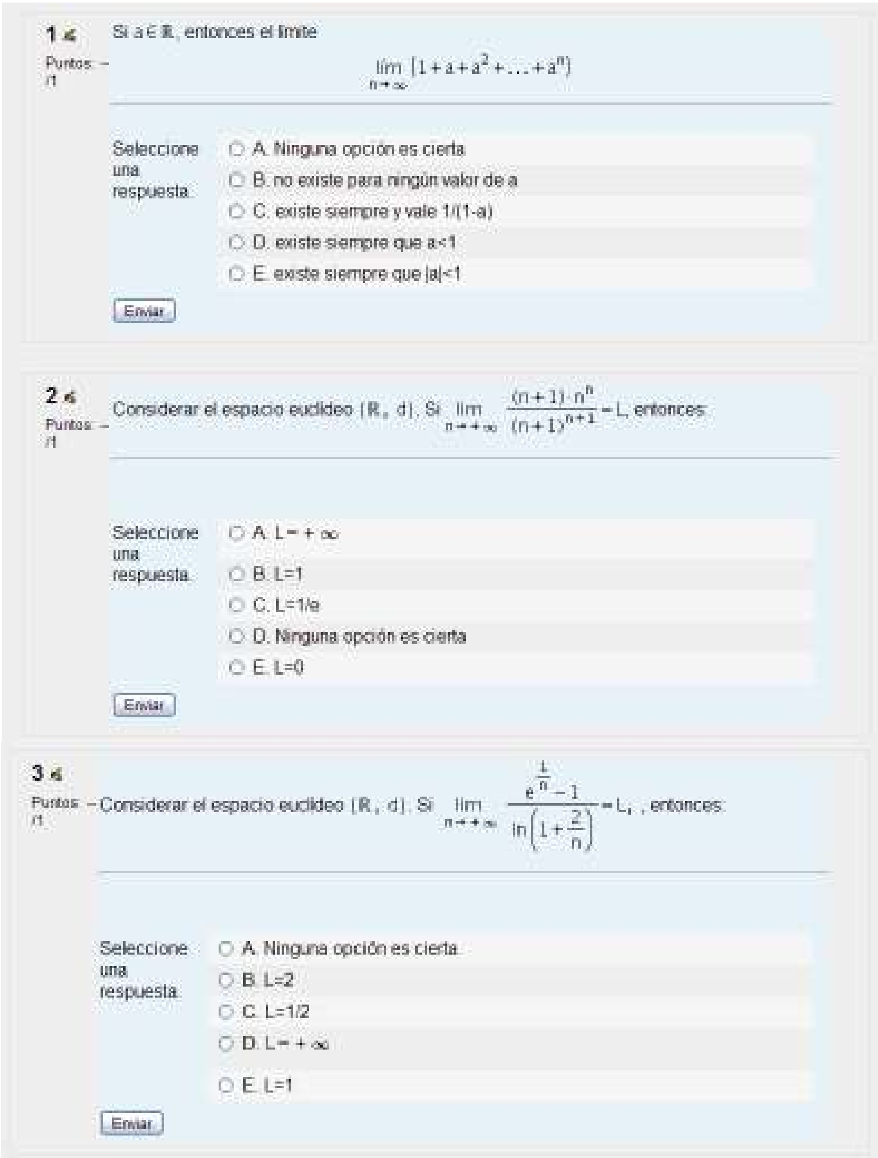
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

podemos obtener el desarrollo para $f(x) = 2^x$ sin necesidad de calcular sus derivadas n-esimas

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \frac{(x \ln 2)^3}{3} + \ldots = \sum_{n \geq 0} \frac{(x \ln 2)^n}{n!}$$

Otra metodología muy eficiente de evaluación continuada está basada en la elaboración de cuestionarios de evaluación en Moodle. El trabajo aquí es previo y no de seguimiento y corrección como en el caso de los ejercicios puntuables. En este caso se requiere de un banco de preguntas especialmente amplio, a fin de que las repeticiones entre un curso y otro sean prácticamente cero de modo que realmente necesiten realizar el cuestionario y no copiar resultados que ya conocen. Éste amplio banco de preguntas para cada tema permite crear, en un momento determinado, un cuestionario con una colección de preguntas determinada y se pide a los alumnos que resuelvan dicho cuestionario en una clase en aula informática. La corrección es automática por el sistema y se obtiene un feedback de las notas y estadísticas inmediato y con una corrección absoluta.

A continuación adjuntamos las imágenes correspondientes a un cuestionario ejemplo, con diez preguntas y un tiempo de 45 minutos para su resolución correspondiente al tema de sucesiones y series numéricas.



1 Puntos: --/1

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + a + a^2 + \ldots + a^n\right]$$

Seleccione una respuesta.

- A. Ninguna opción es cierta
- B. no existe para ningún valor de a
- C. existe siempre y vale 1/(1-a)
- D. existe siempre que a<1
- E. existe siempre que |a|<1

Enviar

2 Puntos: --/1

Considerar el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = L$, entonces

Seleccione una respuesta.

- A. $L = +\infty$
- B. L=1
- C. L=1/e
- D. Ninguna opción es cierta
- E. L=0

Enviar

3 Puntos: --/1

Considerar el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} = L$; , entonces:

Seleccione una respuesta.

- A. Ninguna opción es cierta
- B. L=2
- C. L=1/2
- D. $L = +\infty$
- E. L=1

Enviar

4 Puntos: --/1

Considerar el espacio euclídeo $(\mathbb{R}, d)$, y $a,b \in \mathbb{R}^+$, $a>b$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = L$, entonces:

Seleccione una respuesta.

- A. L=a+b
- B. L=b
- C. $L=+\infty$
- D. Ninguna opción es cierta.
- E. L=a

Enviar

5 Puntos: --/1

La serie numérica

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)!}$$

Seleccione una respuesta.

- A. es divergente
- B. Ninguna opción es cierta.
- C. es convergente y su suma vale $e-2$
- D. es convergente y su suma vale e
- E. es convergente y su suma vale $e-1$

Enviar

6 Puntos: --/1

Calcular, si es posible, la suma de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2}{4n^2-1}$$

Seleccione una respuesta.

- A. 0
- B. Ninguna opción es cierta.
- C. 1/2
- D. 1
- E. la serie es divergente

Enviar

7 Puntos: --/1

El dominio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(x-3)^n}{4n\ 3^n}$$

Seleccione una respuesta.

- A. Ninguna respuesta es cierta.
- B. (0,6]
- C. (0,6)
- D. [0,6)
- E. [0,6]

Enviar

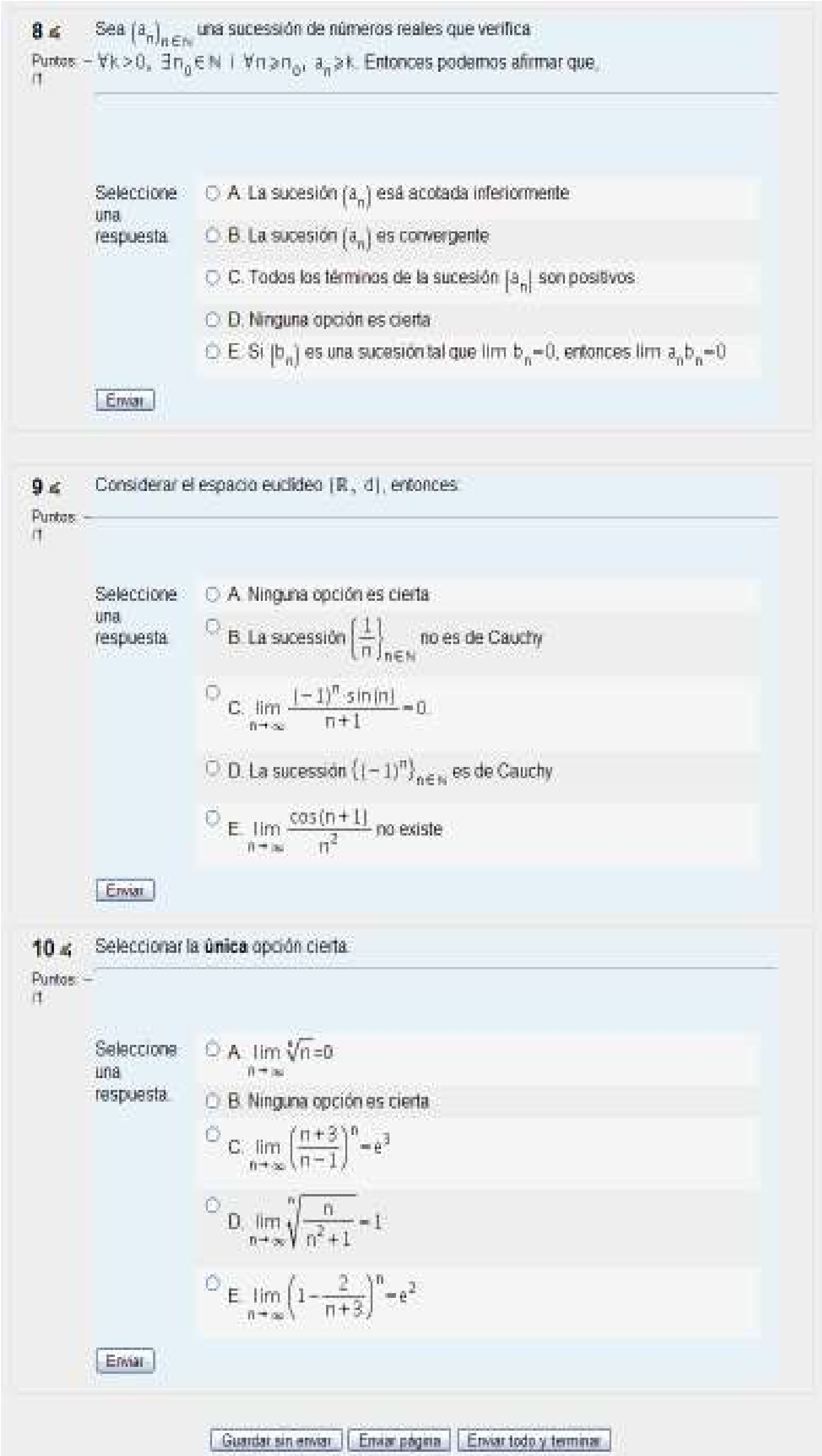


Ilustración 36 - Ejemplo de cuestionario completo de evaluación

Y a continuación observamos algunas de las estadísticas típicas que nos aporta de forma inmediata el propio sistema Moodle. Porcentaje de respuestas correctas, diagramas de todo tipo, resultados por alumno, resultados por grupo, estadísticas por pregunta o por grupo de preguntas, etc…

Taula d'anàlisi d'elements

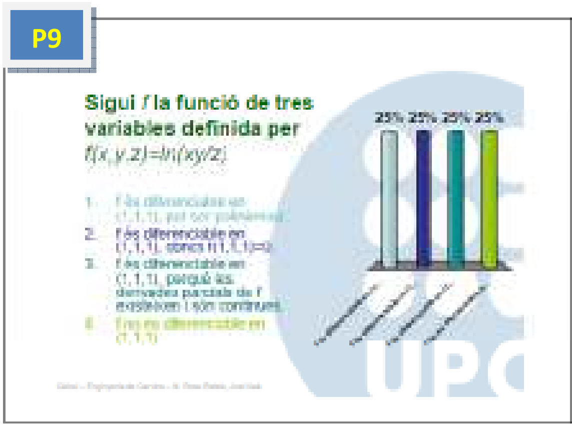
P.	Text de la pregunta	Text de la resposta	crèdit parcial	Núm. R.	R.%	%Correctes Dificultat	DT	Índex disc.	Coef. disc.
(119719)	M1.5 : Sigui $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2+x-2} < \frac{1}{4}\right\}$	Cap altre opció és certa.	(1,00)	25/61	(41%)		0,496	0,27	0,31
		$A = (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$	(0,00)	26/61	(43%)				
		$A = (-2,1)$	(0,00)	3/61	(5%)				
		$A = (-\infty,-3) \cup (-2,1)$	(0,00)	4/61	(7%)				
		$A = (-2,1) \cup (2,+\infty)$	(0,00)	2/61	(3%)				

Ilustración 37 - Resumen de estadísticas para una pregunta de cuestionario

Además de estos sistemas, sin duda infalibles, estamos ya convencidos de la eficacia de un nuevo sistema, ya comentado y aquí expandido: el televoto. Este innovador sistema tiene la magnífica virtud de captar la atención y motivación del alumno en clase como ningún otro. Una sesión de televoto cada dos o tres meses y en su justa medida permite, además de captar dicha atención del alumno que garantizará su aprendizaje, una posibilidad real de evaluación continuada del alumno.

El sistema de televoto tiene la capacidad de almacenar los resultados de lo que pulsa cada alumno y para cada pregunta durante toda la sesión, asignando al final una nota a cada alumno. Además, si los alumnos hablan y comentan entre ellos se debe permitir, eso es cooperación y no copia, ¡claro está! Nadie sabe la solución cierta con absoluta seguridad, que discutan los argumentos en pequeños grupos de dos o tres resulta muy productivo y eficaz. Sin duda estamos ante un modo de evaluación eficaz y eficiente, aunque deba ser usado en su justa medida.

A continuación se visualiza parte del cuestionario de televoto que se ofrece para el capítulo de funciones de variable vectorial. Cuando los alumnos acaban de responder con sus controles remotos las barras se actualizan con el resultado final y en el sistema queda grabada la actuación de cada alumno, para poder poner una nota al final del cuestionario.



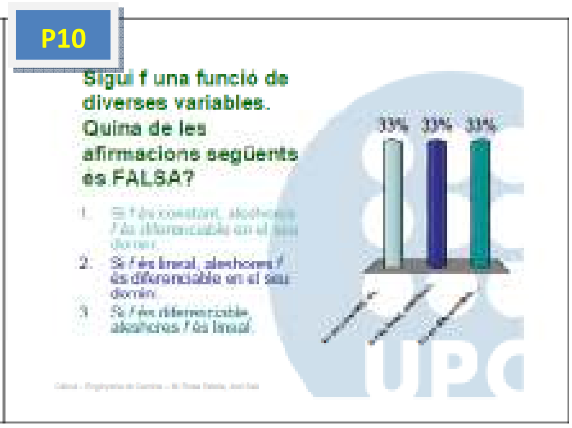


Ilustración 38 - Diapositivas con las cuestiones de la sesión de televoto

En lo que a estadísticas se refiere, aquí destacaremos únicamente las globales de cada pregunta para uno de los grupos analizados (llamado grupo 10). Insistimos en que también se almacenan datos sobre cada alumno y multitud de otras estadísticas más o menos útiles según el estudio que se desee analizar.

Para un grupo de tres alumnos cualquiera el formato es:

Alumno	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	TOTAL
BE666999	1	1	1	-1/2	1	1	-1/3	1	1	1	**7.17**
CF777000	1	0	1	1	-1/2	1	-1/3	-1/3	1	-1/2	**3.33**
DG888111	-1	1	0	-1/2	1	1	-1/3	1	0	0	**2.17**

Ilustración 39 - Tabla resumen de las estadísticas particulares del televoto

Y a nivel de grupo los resultados más destacados que se obtienen del propio software que aporta los datos se pueden resumir tal como sigue.

Resultados grupo 10. Sesión de televoto del tema 7

Nombre de sesión: Grupo10--09-02-2009.tpz
Creado: 12/02/2009 11:59
Alumnos : 45

P1	**Respuestas**		P2	**Respuestas**	
	(porcentaje)	**(recuento)**		**(porcentaje)**	**(recuento)**
Verdad	11,11%	5	Verdad	11,36%	5
Falso	***88,89%***	***40***	***Falso***	***88,64%***	***39***
Totales	100%	45	**Totales**	100%	44

P3	**Respuestas**		P4	**Respuestas**	
	(porcentaje)	**(recuento)**		**(porcentaje)**	**(recuento)**
Verdad	35,56%	16	Es dif…	6,98%	3
Falso	***64,44%***	***29***	Sólo…	4,65%	2
			Ni siq…	***88,37%***	***38***
Totales	100%	45	**Totales**	100%	43

P5	**Respuestas**		P6	**Respuestas**	
	(porcentaje)	**(recuento)**		**(porcentaje)**	**(recuento)**
Es dif…	18,60%	8	En tod…	15,38%	4
Sólo…	*16,28%*	*7*	En nin…	23,08%	6
Ni siq…	***65,12%***	***28***	***…(a,b)…***	***50%***	***13***
			…(1,0)…	11,54%	3
Totales	100%	43	**Totales**	100%	26

P7	Respuestas		P8	Respuestas	
	(porcentaje)	(recuento)		(porcentaje)	(recuento)
f es…	6,82%	3	***Si…***	***16,28%***	***7***
D_1…	*31,82%*	*14*	En…	23,26%	10
D_2…	***25%***	***11***	D_u…	13,95%	6
Si…	36,36%	16	Ning…	46,51%	20
Totales	100%	44	**Totales**	100%	43

P9	Respuestas		P10	Respuestas	
	(porcentaje)	(recuento)		(porcentaje)	(recuento)
…polinomica	0%	0	***…const…***	***20%***	***9***
…f(1,1,1)=0	*11,36%*	*5*	…lineal…	28,89%	13
…parcia…	***63,64%***	***28***	…dif…	51,11%	23
…no dif…	25%	11			
Totales	100%	44	**Totales**	100%	45

Ilustración 40 - Tabla resumen de las estadísticas generales del televoto

Entonces, con todo este análisis estadístico ofrecido por el propio sistema del televoto podemos obtener, además de toda la valoración de calificaciones de los alumnos, estadísticas de tipo práctico para saber si el cuestionario estaba bien pensado o no, de la misma forma que con la evaluación en modo cuestionario. Pues si una pregunta nadie la responde bien, probablemente sea debido a la mala formulación; o si una la responde todo el mundo bien, probablemente era demasiado básica. Sencillos diagramas son también obtenidos directamente a partir del software de televoto.

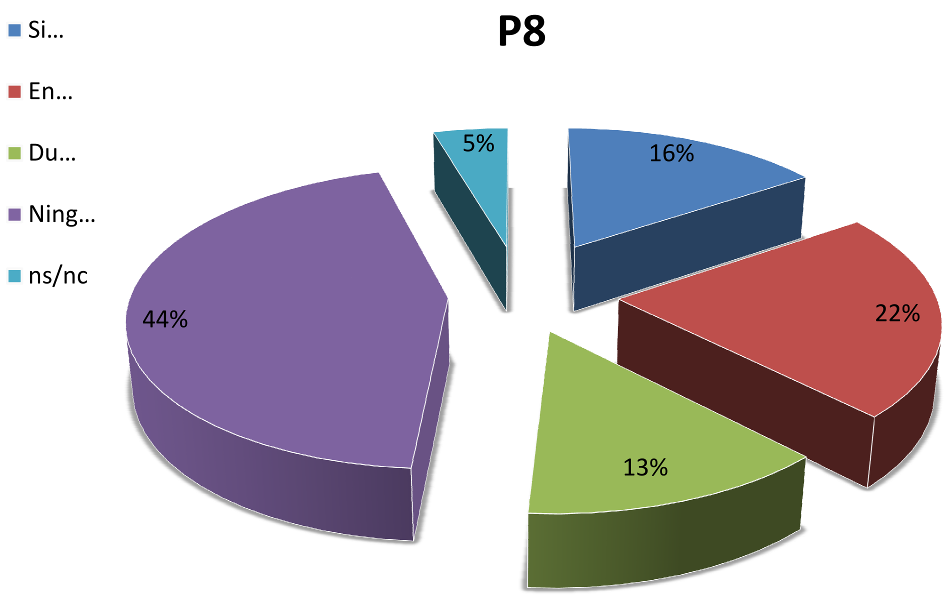


Ilustración 41 - Relación de porcentajes de cada respuesta para la pregunta 8

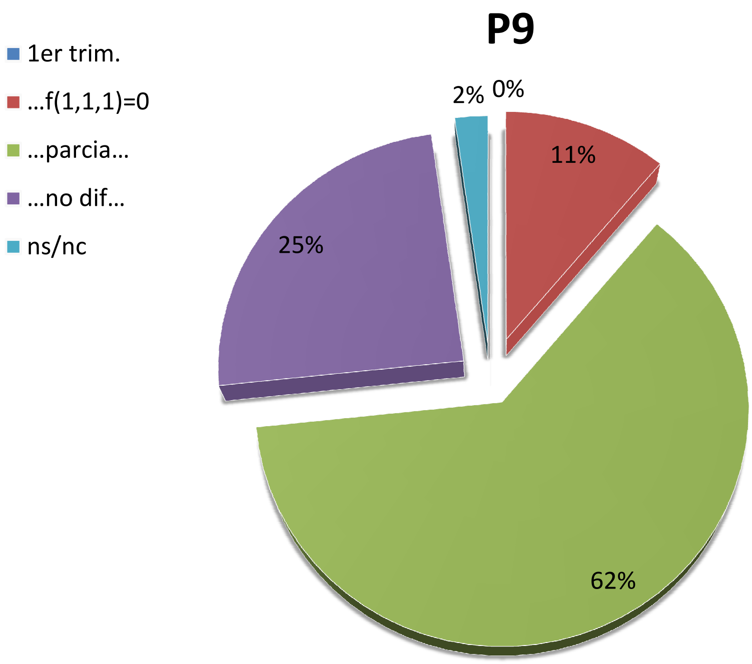


Ilustración 42 - Relación de porcentajes de cada respuesta para la pregunta 8

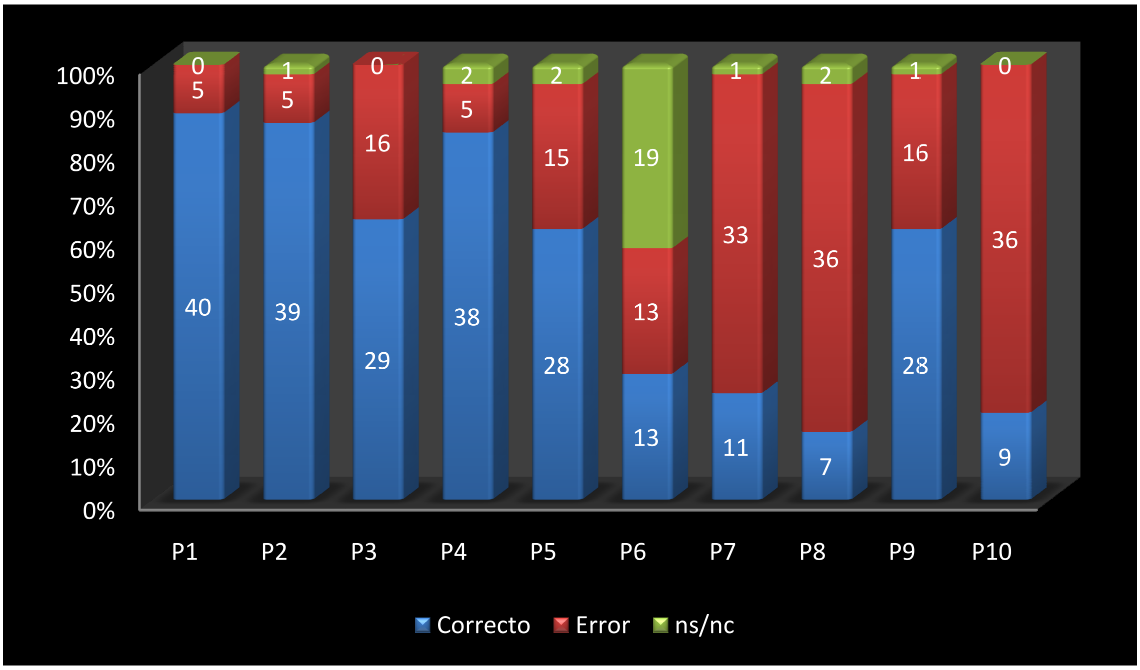


Ilustración 43 - Relación de respuestas correctas, erróneas y en blanco

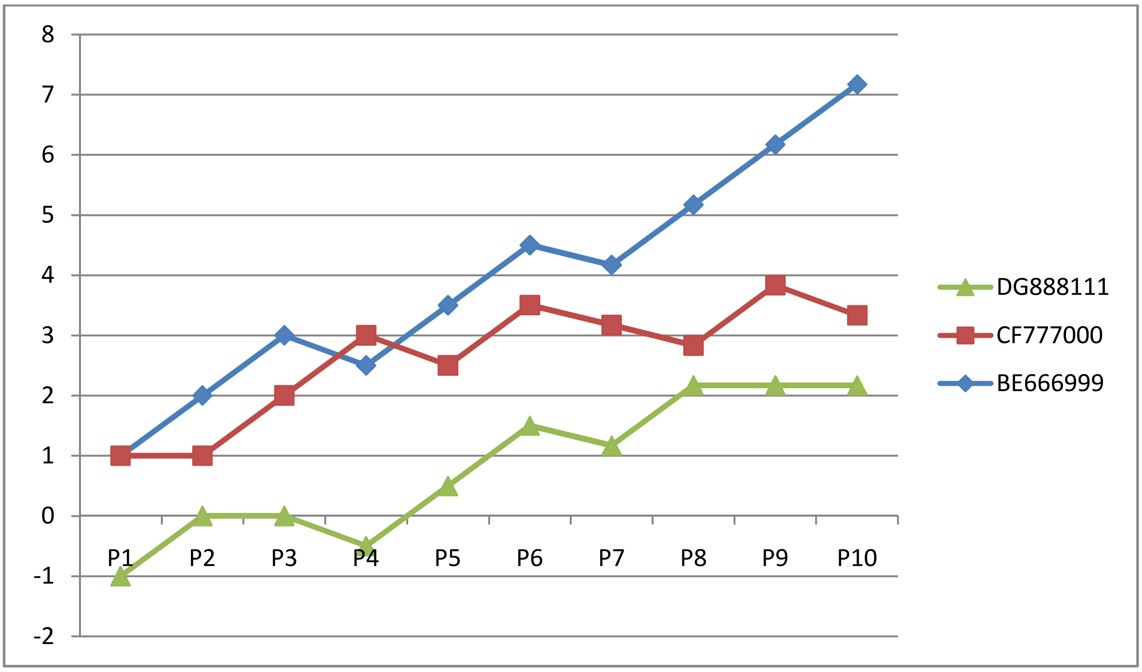


Ilustración 44 - Comparativa de resultados acumulados entre los 3 alumnos

Finalmente, cabe la posibilidad de permitir que el alumno realice un trabajo, individual o preferiblemente en grupo, sobre algún tema en particular relacionado con la asignatura y de modo que le sirva para profundizar en algún aspecto mientras se divierte analizando y estudiando aspectos particulares que a él o ella le interesan particularmente. De algún modo, siguiendo la tónica de los trabajos de investigación (treball de recerca) que se realizan en segundo de bachillerato, aunque quizás en formato más condensado y siempre enfocados a esta asignatura. Es una manera también recomendable y sencilla de estimular su apetito por el Cálculo. Podemos ver en la siguiente captura un ejemplo sobre un trabajo de Fibonacci o de Dimensiones.

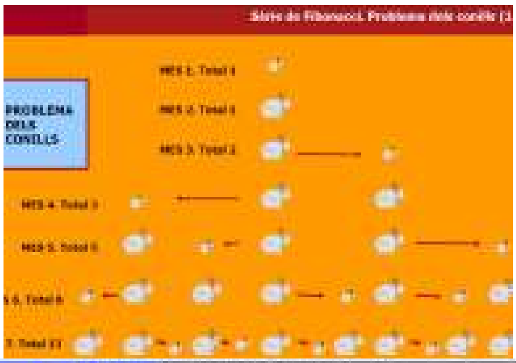


Ilustración 45 - Trabajos de investigación de Bachillerato

Autoevaluación

Todo el sinfín de actividades y posibilidades que hemos ido desarrollando hasta ahora en este texto pueden ser usados como ejercicios de autoevaluación por parte del alumno. La autoevaluación es imprescindible para que el estudiante sea consciente de su nivel en cada momento. Probablemente los ejercicios más prácticos a nivel de autoevaluación sean los cuestionarios, y es por ello que se propone adjuntar un cuestionario con un banco amplio de preguntas al final de cada tema. Que no sea de imprescindible uso pero sí muy recomendable. De este modo, los estudiantes pueden ir comprobando, tema a tema, si siguen o no la asignatura y de este modo, saber qué temas deben revisar con mayor énfasis.

Además, los ejercicios interactivos y los laboratorios pueden ser usados como autoevaluación al tratarse de la resolución de ejercicios continuamente resueltos y replanteados por el sistema. En cualquiera de los casos, los resultados e informes son enviados inmediatamente al profesor o instructor de la asignatura vía Moodle. Estos ejercicios de autoevaluación no son más que, como dice el nombre, de autoevaluación, pero pueden llegar a ser considerados por el profesor en el caso en que la nota sea muy dudosa entre dos franjas diferenciadas: aprobado o suspenso, por ejemplo. Es decir, el trabajo continuado y constante por parte del alumno puede ser valorado, extraoficialmente, positivamente.

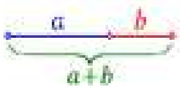
Exámenes presenciales

Como ya se ha comentado con anterioridad, la evaluación mediante exámenes convencionales o pruebas de final de cuatrimestre y curso siguen y seguirán siendo siempre imprescindibles, al menos, para grupos de alumnos relativamente numerosos. Resulta complicado conseguir mantener un nivel constante de dificultad y cuán mayor es el número de evaluaciones más se acentúa dicha realidad. Pese a ello, la realización de exámenes presenciales de entre 3 y 5 horas de duración sigue siendo un ejercicio muy interesante para alumno y profesor. No sólo se es capaz de demostrar su nivel en la materia sino que además, se realiza un importante ejercicio de concentración y rendimiento bajo condiciones extremas de tensión, nervios y deber de decisión.

La personalidad de un estudiante va evolucionando a medida que pasa sus años en la universidad, y en gran parte, es debido a la experiencia que le aportan los exámenes de larga duración. Es una carrera de fondo y al final de la titulación los estudiantes son capaces de hacer exámenes en batería y sin apenas pausa, con un rendimiento cada vez mejor. Resulta nada interesante plantear un examen con ejercicios sumamente mecánicos y sencillos para el alumno, pues se pierde toda esta esencia descrita. Es por ello que es necesario pensar en plantear un examen exigente a nivel intelectual, especialmente en asignaturas de ámbito matemático, pues así se exprimirá al máximo la inteligencia del estudiante. No se trata de plantear un examen imposible e inaccesible, simplemente al límite de sus posibilidades, aunque luego se corrija con cierta manga ancha. Ese es el punto que permite un rendimiento óptimo del estudiante. Veamos un ejemplo de un examen correspondiente al primer parcial.

ENGINYERIA DE CAMINS, CANALS I PORTS
1r PARCIAL - CÀLCUL - 20/01/2009
DMA3 - ETSECCPB - UPC

Problema [10p] El nombre d'or i la successió de Fibonacci són els pilars de la matemàtica clàssica. Tenen multitud d'aplicacions en els diversos àmbits del Càlcul i la Geometria. El nombre auri es defineix algebraicament com $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\phi \approx 1.6180339887...$) i correspon, segons la seva definició geomètrica, a la proporció obtinguda segons la partició del segment següent:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} =: \phi$$

La successió de Fibonacci es defineix mitjançant la recurrència següent:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

La raó àuria i la successió de Fibonacci estan molt relacionades i prova d'aquest fet es la definició de la successió de Fibonacci mitjançant una fórmula tancada:

$$F(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

Amb tot això, resoleu els apartats següents.

(a) [1p] Demostreu que el nombre d'or no és racional, i.e. $\phi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. [Indicació: useu la definició geomètrica de ϕ].

(b) [1p] Considereu la successió definida per recurrència següent:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \end{cases}$$

Calculeu, si existeix, el límit de la successió definida recurrentment. [Indicació: demostreu primer, usant la definició algebraica de ϕ, que aquest nombre verifica la propietat $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$]

(c) [1p] Considereu la successió recurrent definida per:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_n = \sqrt{1 + y_{n-1}} \end{cases}$$

Calculeu, si existeix, el límit d'aquesta successió. [Indicació: demostreu primer que es verifica la propietat $\phi^2 = 1 + \phi$].

(d) [1p] Proveu que ϕ^n satisfà la recurrència de Fibonacci. Observeu que aleshores podrem escriure $\phi^n = a\phi + b$. Trobeu a i b. Useu això per a calcular $3\phi^3 - 5\phi^2 + 4$.

(e) [1p] Calculeu el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$$

(f) [1.5p] Calculeu una aproximiació de primer ordere, mitjançant la diferencial, del nombre d'or. [Indicació: considereu $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{2}$ i calculeu $df(4)(1)$]. Com trobaríeu una aproximació millor?

(g) Sigui $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{F(n)}, \forall n\in\mathbb{N}^*\right\}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funció definida per

$$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in A \\ 0 & \text{si} \quad x\notin A \end{cases}$$

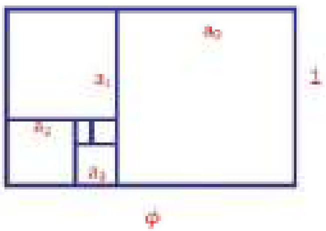
aleshores:

(i) [0.5p] Determineu l'interior, l'adherència, l'acumulació, la frontera i el conjunt de punts aïllats de A. És A compacte?

(ii) [1p] Calculeu els límits, si existeixen, de la funció g per a $x\in\{0,\frac{1}{2},1\}$.

(iii) [0.5p] Estudieu la continuïtat de g.

(h) [1.5p] Es coneix com a rectangle auri aquell que té una proporció base-alçada de valor ϕ. Si es va subdividint recursivament en quadrats es crea una successió de quadrats de costats a_n i d'àrees a_n^2. Partint del rectangle auri de base 1 i alçada ϕ, calculeu la suma d'àrees dels quadrats formats i comproveu que es correspon a l'àrea del rectangle gran, és a dir, ϕ.



[Indicació: calculeu primer la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\phi^{2n}}$].

Inmediatamente tras el examen, que ha sido bastante exigente a nivel intelectual, el alumno siente la necesidad de conocer la solución de aquellos puntos en los que se ha encallado especialmente. Es por ello que es muy importante darles la posibilidad de entender la solución, justo tras el examen que es el momento en el que ellos lo tienen más fresco y recién. Se trata pues de colgar la solución del examen tan pronto como sea posible. Veamos a continuación, la solución de alguno de los apartados del ejercicio planteado anterior.

a) Si anomenem $n=a+b$ i $m=a$, aleshores per la definició geomètrica de ϕ obtenim

$$\frac{n}{m}=\frac{m}{n-m}$$

Si $\phi\in\mathbb{Q}$ prenem els n i m positius que fan que ϕ sigui una fracció irreductible. Això porta a una contradicció perquè $\frac{n}{m}$ no pot ser igual a una fracció $\frac{m}{n-m}$ amb $n\neq m$ i $m\neq n-m$. El cas $n=m$ és absurd en obtenir $n-m=0$.

c) Podem observar la recurrència

$$\phi^0 = 1$$
$$\phi^1 = \phi$$
$$\phi^2 = 1 + \phi$$
$$\phi^3 = \phi\phi^2 = \phi(1+\phi) = \phi + \phi^2$$
$$\phi^4 = \phi\phi^3 = \phi(\phi+\phi^2) = \phi^2 + \phi^3$$

i considerem la hipòtesi d'inducció

$$\phi^{n-1} = \phi^{n-2} + \phi^{n-3}$$

de forma que

$$\phi^n = \phi\phi^{n-1} = \phi(\phi^{n-2} + \phi^{n-3}) = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$$

i, per tant, satisfà la recurrència de Fibonacci. A més a més, com que

$$\phi^{n-1} = \phi^{n-2} + \phi^{n-3}$$

podem escriure

$$\phi^n = 2\phi^{n-2} + \phi^{n-3}$$

i com que

$$\phi^{n-2} = \phi^{n-3} + \phi^{n-4}$$

podem escriure

$$\phi^n = 3\phi^{n-3} + 2\phi^{n-4}$$

i com que

$$\phi^{n-3} = \phi^{n-4} + \phi^{n-5}$$

podem escriure

$$\phi^n = 5\phi^{n-4} + 3\phi^{n-5}$$

de forma que

$$\phi^n = F_{k+1}\phi^{n-k} + F_k\phi^{n-(k+1)}$$

i, amb $k = n-1$ tenim

$$\phi^n = F_n\phi^1 + F_{n-1}\phi^0 = F_n\phi + F_{n-1}$$

Calculem ara $3\phi^3 - 5\phi^2 + 4$

$$\phi^3 = F_3\phi + F_2 = 2\phi + 1$$
$$\phi^2 = F_2\phi + F_1 = \phi + 1$$

d'on s'obté:

$$3\phi^3 - 5\phi^2 + 4 = 3(2\phi+1) - 5(\phi+1) + 4 = \phi + 2 = 3.618$$

O finalmente podemos observar la resolución de los apartados e) y g), que resultan especialmente interesante al unir los conceptos teóricos intrínsecos del problema que se solicitaba con el bloque temático del problema, es decir, la recurrencia de Fibonacci.

e) Considerem la funció

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{2}$$

aleshores, $f(5)\approx f(4)+df(4)\cdot(1)$, ja que

$$f(a+h)-f(a)\approx df(a)\cdot h$$

en el nostre cas

$$df(x)\cdot h=f'(x)\cdot h=\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{x}}h$$

i, per tant

$$f(5)\approx\frac{1+\sqrt{4}}{2}+\frac{1}{4\sqrt{4}}1=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}=\frac{13}{8}=1,625$$

De fet com que

$$F_n=\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots\}$$

observem que $\frac{13}{8}=\frac{F_7}{F_6}$ de forma que podem trobar una aproximació millor amb l'apartat anterior, considerant $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ amb n prou gran ($n\geq 7$). Per exemple,

$$\frac{F_8}{F_7}=\frac{21}{13}=1,615$$

g) i) Es tracta d'una sèrie geomètrica de raó $\frac{1}{\phi^2}$, per tant,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\phi^{2n}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\phi^2}}=\frac{\phi^2}{\phi^2-1}=\frac{\phi^2}{\phi}=\phi$$

ii) Del dibuix podem veure que

$$\left.\begin{array}{r}a_0=1\\ a_0+a_1=\phi\end{array}\right\}\Rightarrow a_1=\phi-1=\frac{1}{\phi}$$

també podem veure

$$\left.\begin{array}{r}a_1=\frac{1}{\phi}\\ a_1+a_2=1\end{array}\right\}\Rightarrow a_2=1-\frac{1}{\phi}=\frac{\phi-1}{\phi}=\frac{1}{\phi^2}$$

i també

$$\left.\begin{array}{r}a_2=\frac{1}{\phi^2}\\ a_2+a_3=a_1\end{array}\right\}\Rightarrow a_3=\frac{1}{\phi}-\frac{1}{\phi^2}=\frac{\phi-1}{\phi^2}=\frac{1}{\phi^3}$$

I com podem calcular l'àrea del rectagle com la suma

$$A=\sum_{n\geq 0}a_n^2$$

veiem que

$$A=1^2+\left(\frac{1}{\phi}\right)^2+\left(\frac{1}{\phi^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\phi^3}\right)^2+\ldots=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\phi^{2n}}=\phi$$

Líneas de futuro

WirisQuizzes

Desde hace algún tiempo la familia de herramientas Wiris ofrecen herramientas de soporte a la educación matemática en Moodle. Como ya hemos comentado, hasta el momento estas soluciones ofrecían un editor de fórmulas basado en iconos y paletas, además de una plataforma de cálculo matemático potente llamada WirisCAS, con la que hemos elaborado principalmente los laboratorios interactivos y los ejercicios interactivos que ya hemos mostrado con anterioridad. En la siguiente iteración se pretende integrar la herramienta de cálculo y software matemático ofrecido por Wiris con los cuestionarios de Moodle. El objetivo es pues poder crear bancos de preguntas aleatorias integradas totalmente en el entorno Moodle.

WirisQuizzes permite incorporar a todas las preguntas de Moodle elementos matemáticos generados de forma aleatoria. Además la respuesta puede ser evaluada de forma automática por el motor de cálculo matemático tanto si se trata de una respuesta múltiple o una respuesta abierta.

La introducción de elementos aleatorios en la generación de cuestionarios es una característica especialmente valorada por cualquier profesor, pues con un solo enunciado se pueden generar distintos problemas evitando así la componente de copia entre uno y otro alumno. En materias de ámbito matemático es posible generar cuestiones con un enunciado aleatorio que permiten al estudiante ejercitar sus habilidades por tiempo ilimitado, a modo de autoevaluación.

La evaluación de las respuestas de forma automática es otro de los grandes temas en el caso de preguntas aleatorias. Integrar un sistema de cálculo matemático para la evaluación automática de las respuestas del estudiante permite un importante ahorro de recursos.

WirisQuizzes permite combinar las fórmulas matemáticas y la potencia de cálculo matemático para enriquecer el sistema de preguntas de Moodle. El sistema añade a los tipos de preguntas preexistentes en Moodle parámetros avanzados. No estamos añadiendo un nuevo tipo de pregunta, solamente mejoramos los tipos de preguntas que ya existían. El profesor, tras apretar el botón Opciones avanzadas, puede acceder a nuevos campos de la pregunta.

El mecanismo de programación es bastante sencillo y al alcance de cualquier profesor. A continuación vemos el ejemplo de programación de un ejercicio para un cuestionario aleatorio en el ámbito de integración. En lugar de disponer de un solo enunciado tendremos, bajo el mismo patrón, infinidad de éstos que evitará, en todo caso, que dos alumnos tengan el mismo y copien el resultado sin tener la más remota idea. Esto fomenta la *cooperación* y evita la copia, en todo momento.

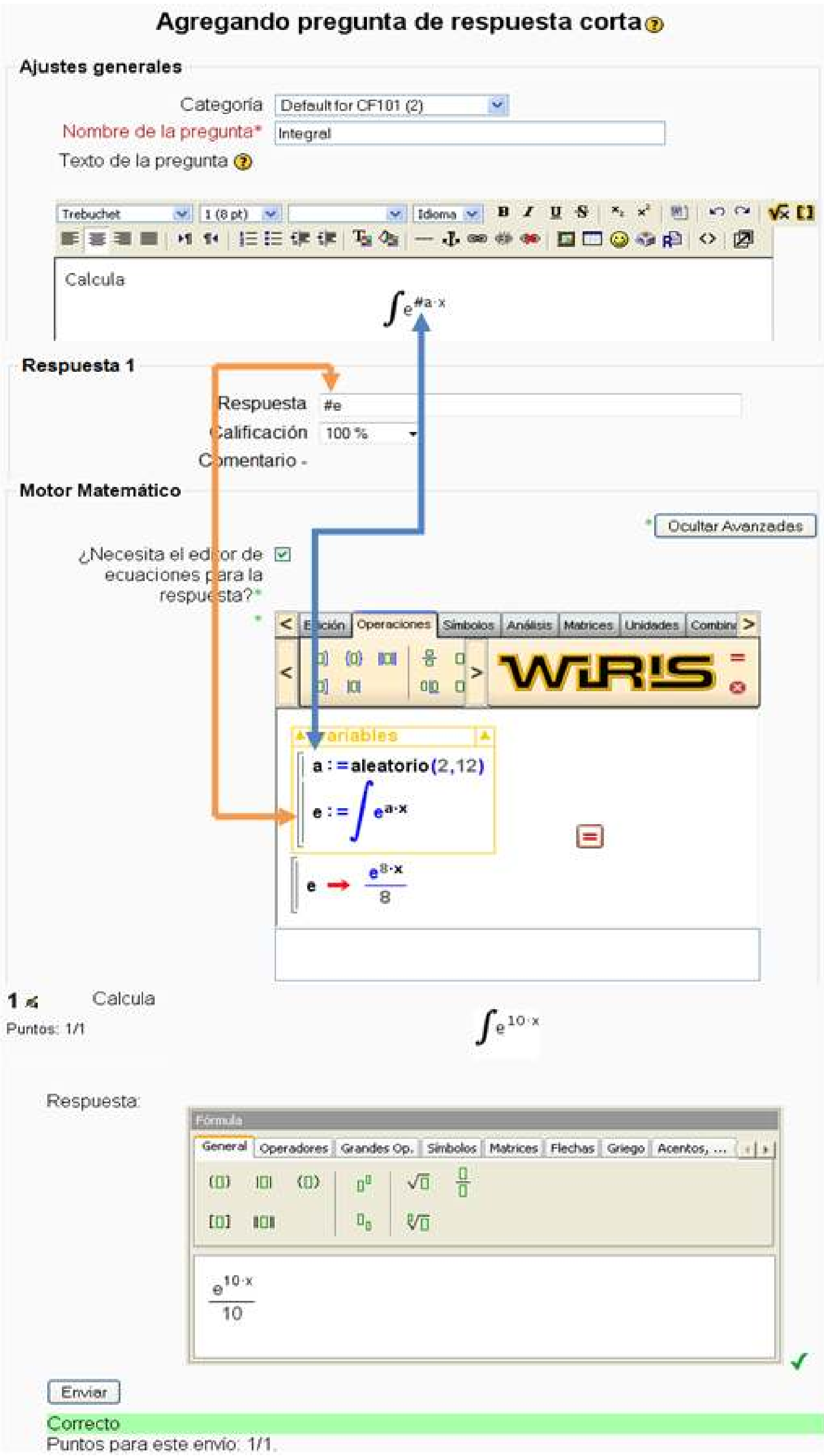


Ilustración 46 - Programación de un ejercicio básico mediante WQ

Como ya es conocido, Moodle permite distintos tipos de pregunta para sus cuestionarios. Para los distintos tipos de pregunta de Moodle se han incorporado nuevas funcionalidades. A continuación detallamos las opciones disponibles para cada tipo de pregunta. En todos los casos se pueden incorporar variables creadas por este software en el enunciado o retroalimentación de la pregunta.

Respuesta corta y ensayo

WirisQuizzes permite definir una respuesta corta y la respuesta del ensayo a partir de una variable definida en Wiris. En la figura anterior la respuesta al ejercicio se almacena en la variable *e*. A partir de esta respuesta WIRIS se encargará de comparar la respuesta del usuario con la correcta y validarla o no.

El profesor puede incorporar un editor de fórmulas para redactar la respuesta. Es el profesor quien toma la decisión por un lado porque la necesidad de un editor de fórmulas depende en gran medida de la pregunta. En el futuro el editor de fórmulas puede presentar distintas configuraciones para adaptarse a la temática de la pregunta y seguirá siendo importante que el autor seleccione el tipo de editor de fórmulas necesario.

En el ejercicio mostrado por la figura anterior podemos ver un ejemplo de pregunta con respuesta corta que utiliza el sistema de WirisQuizzes. Primero utilizamos la capacidad de generar números aleatorios del motor de cálculo matemático para que el enunciado sea aleatorio. En el ejemplo a es un número aleatorio entre 2 y 12. Utilizaremos el número aleatorio en el exponente de una función de forma muy simple, basta utilizar la sintaxis #nombre_variable.

El autor del enunciado debe proporcionar la respuesta correcta. La solución es tan simple como que sea el propio motor de cálculo matemático el que haga la tarea. Debemos informar a Moodle sobre qué variable almacenará la respuesta. En el ejemplo calculamos la respuesta y la almacenamos en la variable e. Notamos que hemos seleccionado la opción que permite al estudiante usar un editor de fórmulas para introducir su respuesta. El motor de cálculo matemático se encargará de decidir si la respuesta del usuario es o no válida.

Cierto/Falso

Las preguntas Cierto/Falso de Moodle determinan cuál de las dos respuestas es correcta. Al incorporar WirisQuizzes se permite que sea una variable la que determine si la respuesta es correcta o no. En la figura siguiente podemos ver como la variable solución determina si la respuesta correcta al ejercicio es Cierto o Falso.

Lo normal es que la validez de la respuesta dependa de unos datos que aleatoriamente se han generado con Wiris. Debemos determinar una variable, con valor cierto o falso que determine cuál es la respuesta correcta a la pregunta. En cualquier caso, la respuesta dependerá del enunciado, que para cada usuario será distinto al provenir de un factor aleatorio proporcionado por el motor de cálculo en cuestión

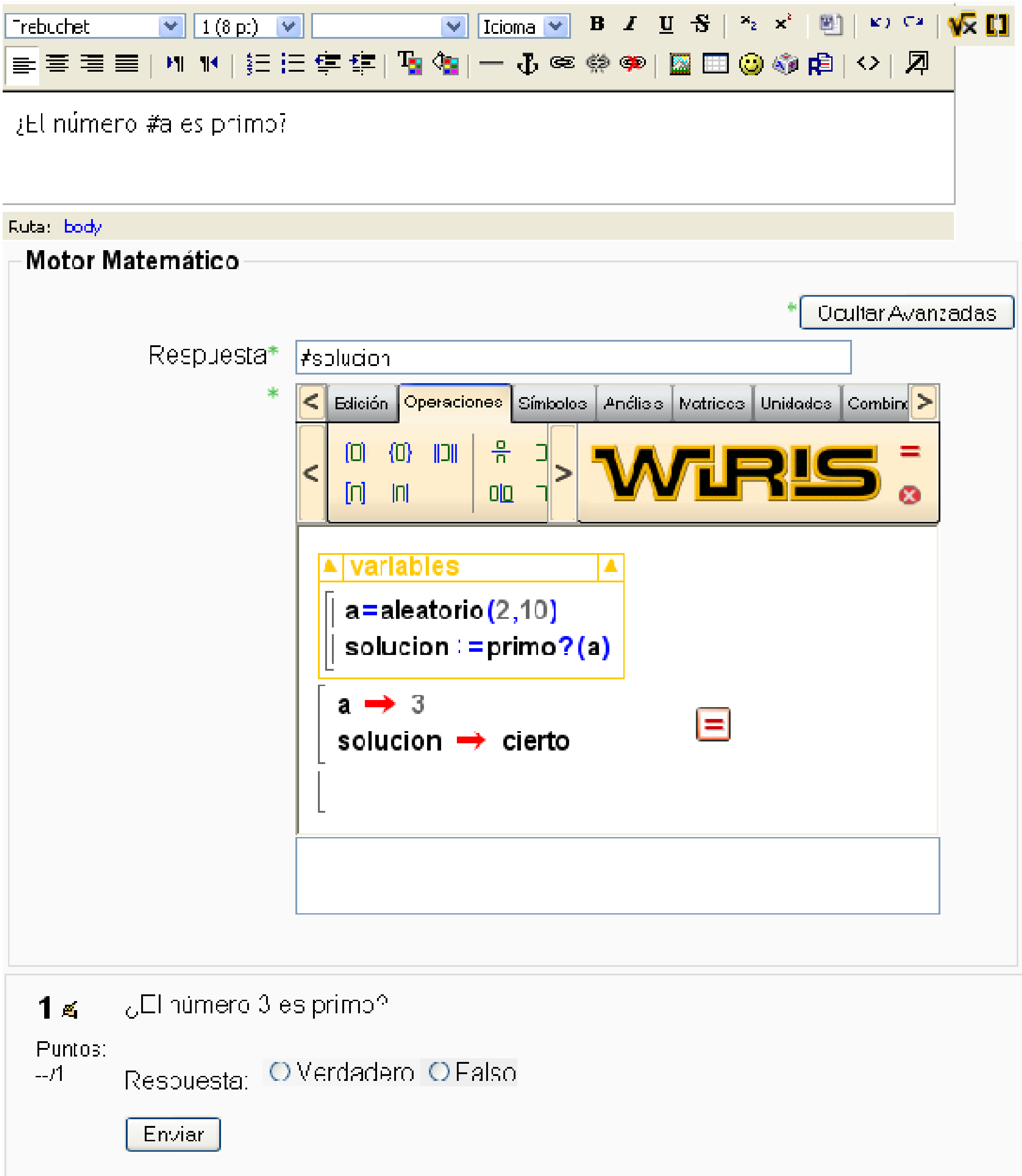


Ilustración 47 - Ejercicio con WQ de cierto o falso

La retroalimentación de la pregunta ha cambiado su filosofía. Ahora la retroalimentación para Cierto es de hecho la retroalimentación en el caso que el alumno responda la opción correcta. Así pues la Retroalimentación Falso la verá el usuario que responda incorrectamente la pregunta.

Opción múltiple

El caso de las opciones múltiples es una generalización de Cierto/Falso. Para cada posible respuesta de Moodle podemos determinar si la nota se debe aplicar o no a través de un variable que tendrá valor cierto o falso. Solo si la variable de Wiris tiene valor cierto

(Sobrescribir calificación) y la respuesta del estudiante coincide con la respuesta propuesta por el profesor se contabilizará su Calificación. No hay cambios en la lógica de la retroalimentación.

Emparejamiento

Se pueden usar el sistema WirisQuizzes para generar las preguntas y respuestas. Las respuestas aparecen dentro de una lista desplegable que solo admite texto. Así pues las variables aparecerán con un formato de texto.

Calculadas y numérico

Estos tipos de preguntas no han sido modificados. De hecho el sistema WirisQuizzes podría hacer innecesarias este tipo de preguntas en el futuro. La filosofía detrás de WirisQuizzes es hacer que todos los tipos de preguntas puedan ser calculadas y numéricas a la vez.

Descripción

Las preguntas de Descripción no tienen evaluación. Así pues WIRIS Quizzes únicamente puede ofrecer a estas preguntas la posibilidad de presentar contenidos aleatorios. De momento no se ha implementado esta opción dado que no parecía ofrecer un gran valor añadido.

Respuestas incrustadas (Cloze)

No se ha modificado dada la complicación técnica del uso de este tipo de preguntas. El trabajo técnico La modificación las preguntas de tipo Cloze para incorporar la potencia matemática de WirisQuizzes ha hecho que se desestimen hasta el momento.

En definitiva, WirisQuizzes permite fácilmente definir variables de tipo matemático, por ejemplo un número o polinomio aleatorio, para luego incorporarlo en cualquier parte de una pregunta. Se considera en el apartado de líneas de futuro porque todavía no han sido utilizadas a la práctica en cursos reales y con estudiantes reales y es, hasta ahora, una prueba piloto de algo futuro; pese a ello, se trata de un futuro muy cercano y probablemente en el curso entrante, 2009-2010 sí sean ya una realidad, dada su grandísima utilidad.

Puede resultar de especial utilidad visualizar los ejemplos realizados paso a paso en los annejos de este texto. Se ha desarrollado todo el proceso de producción de un ejercicio de tipo opción múltiple así como uno del tipo respuesta abierta, con sus particularidades. En el curso virtual adjunto a este texto también se pueden encontrar varios ejercicios de tipo WirisQuizzes con los que experimentar y tratar. Sin duda resulta un ejercicio interesante para el lector, ya que es la mejor de las maneras posibles de percibir la grandeza de dichos ejercicios, manteniendo un nivel de sencillez envidiable. Por todo ello, se trata de un mecanismo futuro que será una realidad en breve.

Consultas virtuales

Otra importante línea de futuro está en las llamadas consultas virtuales. Hoy en día los profesores suelen disponer de un par de horas semanales para que los alumnos vengan a visitarlos al despacho a fin de resolver sus dudas. En el innovador y cambiante mundo en el que vivimos muchos profesores tienen que posponer y/o cambiar sus horarios de consultas debido a viajes docentes o de investigación. Con este sistema se pretende facilitar y potenciar las horas de consultas.

Se trata de fijar ciertas horas al día o semana, ya sea el profesor de la asignatura o posibles becarios de colaboración en la docencia, en las que, vía internet, se ejerzan consultas. Es decir, resolución de dudas vía pantalla. Este software permite la creación de grupos de consultas, con varios alumnos, o bien separar las horas de consultas según el tema, y que se añada quien pueda o quiera, etc. Además facilita mucho la tarea al alumno, ya que no necesita desplazarse hasta los despachos y puede consultar sus dudas desde su propio ordenador personal, en casa o en la biblioteca.

El profesor o instructor dispone de un sistema completo para que las consultas sean tan satisfactorias como sea posible. Este sistema es, además de un micrófono, una webcam y un lector tipo pizarra para escribir a mano, sin tener que picar las fórmulas por ordenador. Aunque el alumno no disponga de dicho hardware, lo importante es que sienta que el profesor le explica las cosas de forma cercana, siempre y cuando él sea capaz de transmitir sus dudas, ya sea mediante micrófono o bien escribiendo las dudas como si fuese un chat.

Existen dos software que resultan útiles en esta línea, iVocalize y CoFFEE. A continuación explicaremos un poco las diferencias pero también los objetivos comunes de cada uno de estos dos programas.

Si nos referimos primeramente a CoFFEE, debe decirse que se trata de un software desarrollado por el equipo LEAD y recibe ese nombre por ser un entorno de educación cara a cara y colaborativo (Collaborative Face to Face Educational Environment). Se trata de un programa gratuito de software libre (open-source) que está diseñado para la sencilla instalación en cualquier red de área local, por ejemplo la de una escuela universitaria o sencillamente una sala de ordenadores en la misma. También pueden instalarlo de forma sencilla los alumnos en sus casas. Dado que CoFFEE está diseñado con la finalidad de facilitar la comunicación entre alumnos y también entre alumno y profesor y no con la finalidad de aportar posibilidades típicas de e-learning, está diseñado para ser sencillo de instalación y uso. Se pueden crear fácilmente grupos y aulas virtuales de alumnos, para que se solucionen dudas entre ellos y hasta con el soporte de un instructor; también se pueden planear sesiones individuales de consultas.

Ilustración 48 - Carátula del proyecto LEAD

Este proyecto tiene su origen en el sistema universitario alemán y está principalmente pensado para la interacción entre alumnos en clase más que para consultas virtuales.

Por otro lado, iVocalize ofrece un conjunto mayor de posibilidades, a día de hoy, pero no se trata de un programa de software libre. Si la universidad o la propia gestión de la asignatura en cuestión alquila una aula virtual, se pueden llevar a cabo sesiones vía web de consultas con una cantidad innumerable de posibilidades: interacción mediante texto por pantalla, micrófono y web cam, por supuesto, aunque además, una señal nítida y totalmente en directo sin prácticamente ningún desfase tanto en imagen como en sonido, una pizarra interactiva donde ambos interlocutores pueden escribir y comentar, un navegador de internet sincronizado entre ambos ordenadores, páginas comunes de anotaciones, compartir pantalla, crear grupos de gente en las sesiones, registrar todo lo sucedido, ofrecer e intercambiar presentaciones simultáneamente…

Ilustración 49 - Imagen comercial de iVocalize

Ambos son sistemas totalmente basados en la tecnología operativa por internet, sin necesidad alguna de uso de una línea de teléfono alternativa ni tampoco de ningún coste añadido para profesor o alumno. El objetivo será, en todo momento, que el coste de no tener frente a frente al instructor o profesor sea menor que el coste de desplazarse al despacho y ceñirse a horarios pactados y tratados entre ambos. En el momento en el que eso suceda, los alumnos se decantarán por la opción de consultas virtuales y significará el éxito de esta medida.

Uso de otros programas matemáticos

Para una asignatura de Cálculo claro está que la programación no tiene una importancia trascendental y es por ello que con un software tipo Wiris, muy potente a nivel gráfico y para la resolución matemática de problemas de planteamiento sencillo, como pueden ser los pertenecientes a esta asignatura es más que suficiente. Pese a ello, si queremos ampliar las posibilidades a otras asignaturas de ámbito matemático donde la programación y los algoritmos toman ya una importancia muy relevante será necesario tratar de incorporar programas tipo Maple o Matlab al entorno Moodle y al e-learning en general.

En realidad, esto es bastante complicado, pues ambas marcas son registradas y no se trata, en ningún caso de software libre. Aún así, tampoco lo es Wiris y en cambio se han conseguido resultados óptimos. El objetivo será entonces desarrollar el material necesario y percatarse de las necesidades de licencias de estas marcas y solicitarlas a nivel de universidad para que sean de uso libre para los alumnos. Eso es lo que se ha conseguido con Wiris y la única vía de posible uso de programas como Maple o Matlab, entre otros.

A continuación mostramos un pequeño ejercicio sobre funciones realizado con Matlab y que no sería difícil de incorporar en el entorno de Moodle, eso sí, salvando las posibles repercusiones que pueden ofrecer los contratos y licencias. Que Moodle interprete lenguaje de Matlab como suyo no es más difícil de lo ya hecho para Wiris; en todo momento se trata de elaborar un plug-in que permita la inserción de pequeñas y adecuadas ventanas de Matlab en el entorno Moodle y que ahí se ejecuten. A nivel informático no es muy problemático y no excesivamente costoso, eso sí, una vez más deberán negociarse las licencias con la marca.

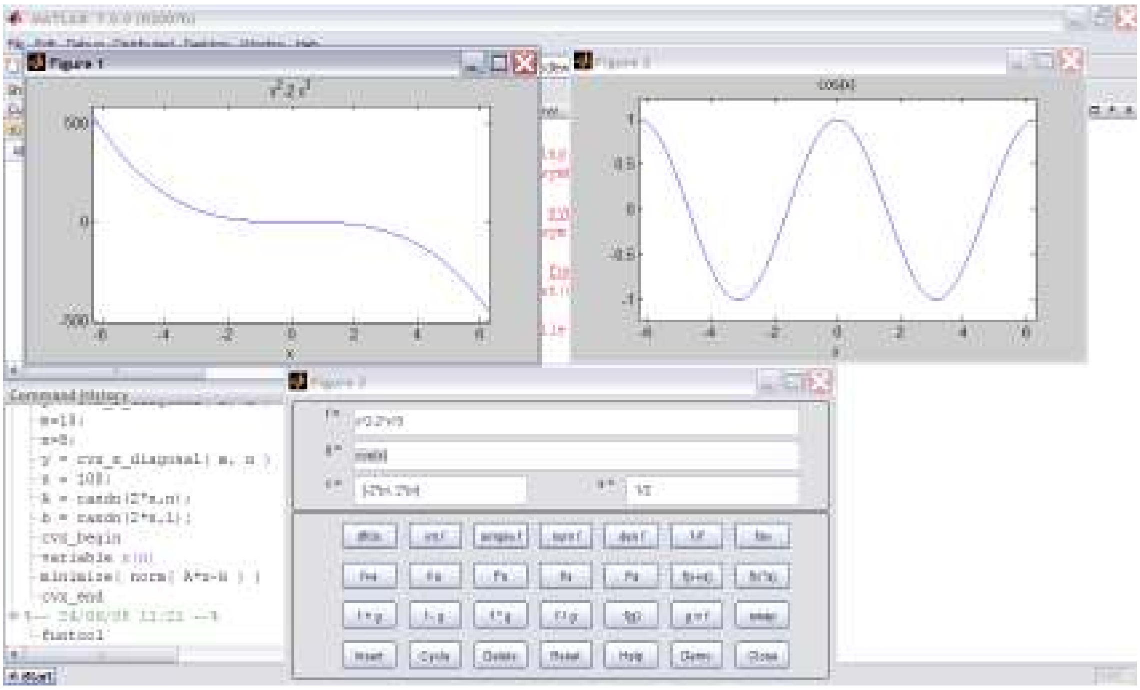


Ilustración 50 - Ejercicio sencillo de funciones con Matlab

En lo que a Maple se refiere sí es cierto que se ha estado trabajando desde nuestro proyecto habiendo ya realizado ejercicios y pruebas piloto y reales, todas con un éxito bastante considerable. Entre los alumnos de una asignatura de Cálculo el problema que aparece es la falta de conocimientos de programación básicos que no les permiten resolver o programar ejercicios en Maple (lo mismo pasaría con Matlab). En cualquier caso, en asignaturas posteriores sí se obtendría un resultado óptimo con este software, ya que tiene un motor de cálculo y librerías de programación matemática fantásticas para la programación y resolución de ejercicios de todo tipo.

Lo que se ha tratado de hacer desde nuestro equipo con el programa Maple ha sido elaborar unos cuestionarios, en la línea de los también explicados WirisQuizzes. De hecho, se dispone ya de unos bancos de preguntas terriblemente numerosos y de una calidad óptima. Se han llevado a cabo tanto en la Facultad de Matemáticas como en la Escuela de Caminos varios tests diagnósticos de conocimientos previos con cuestionarios elaborados así. La siguiente iteración, y en ello se está actualmente trabajando trata de incorporar estos cuestionarios al entorno Moodle, en la misma línea que los comentados WQ. Estos cuestionarios se han elaborado con motor de cálculo Maple y se recogen en un software llamado MapleTA, en el que trabajan varios equipos de multitud de universidades europeas de Finlandia, Alemania además de aquí, entre otras muchas.

Las preguntas siguen una línea totalmente similar a las de WQ y es por ello que adjuntamos simplemente la imagen de un par de ellas a nivel de muestra. En el anejo se puede encontrar la programación de estas preguntas, que se desarrolla total y absolutamente mediante unos códigos en LaTeX y que gracias a un plug-in elaborado por F. Massanés, se suben automáticamente ya a Moodle quedando como preguntas de cuestionarios Moodle siendo además aleatorias, ya que las variables se llaman al motor de cálculo de Maple y éste las devuelve con cierta aleatoriedad: ¡una pasada!

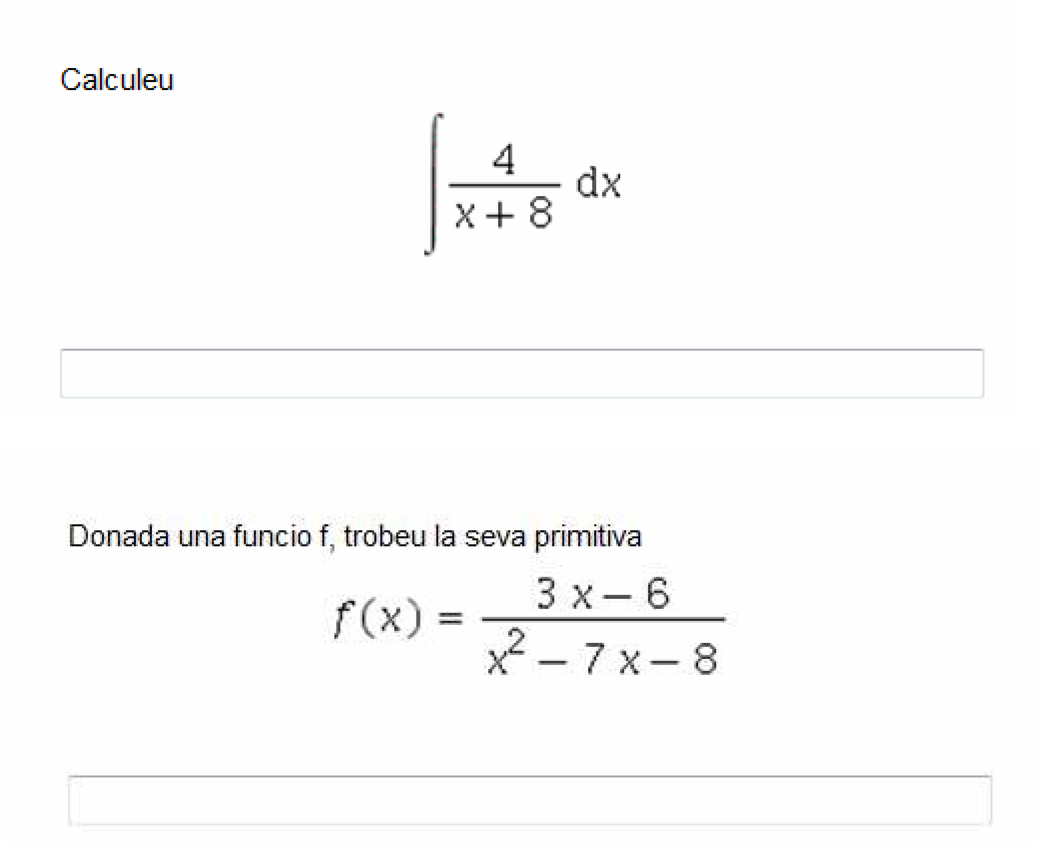


Ilustración 51 - Ejemplo de dos preguntas elaboradas con MapleTA y preparadas para subir a Moodle

Funciona de la siguiente manera. Se elaboran las preguntas en un archivo LaTeX que con ayuda del archivo libre ed.sty (se prescinde de adjuntar en el anejo, se encuentra fácilmente googleando) genera un pdf por si interesa. Al mismo tiempo pueden subirse a Moodle y elaborar un cuestionario; una vez ahí, al realizar el cuestionario se solucionan las preguntas en los espacios de respuesta abierta, que son enviadas automáticamente al motor de Cálculo de Maple devolviendo éste un booleano: correcto o no. Finalmente se generan las notas y demás como para un cuestionario normal y corriente de Moodle.

En definitiva, se tiene algo tremendamente similar a las preguntas de WirisQuizzes, con lo cual, se han elaborado dos mecanismos de elaboración de cuestionarios con preguntas matemáticas aleatorias en paralelo; la oferta es ahora amplia.

Obsérvese que este sistema no ofrece un editor de fórmulas para que se visualicen correctamente en Moodle, simplemente aprovecha las generadas por el código LaTeX y las incluye como imágenes. Curioso e ingenioso, además de práctico y útil.

Conclusiones

Y bien, llegados a este punto toca sacar conclusiones a todo este largo y extenso trabajo. Quizás el resultado obvio más importante sea el de tener siempre en cuenta que, sea lo que sea lo que se use, siempre se trata de mejorar los sistemas de docencia actuales. No deja de ser un trabajo bastante altruista por parte de profesores y universidades, pero no por ello es un trabajo sin valor. Sin duda la docencia actual es distinta de la de hace 15 o 20 años, demos gracias, pero también es esencial que la docencia de dentro de 15 o 20 años sea muy distinta a la de hoy. El objetivo es transmitir conocimientos, el objetivo es que el alumno aprenda la materia que se imparte, en este caso Cálculo, y no porque apruebe un mayor porcentaje respecto de otros años significa eso que el nivel ha bajado y ahora es más fácil aprobar; simplemente ahora llegan a junio y saben Cálculo; hace unos años necesitaban varios años para aprender, dado que se trataba de una tarea totalmente individual.

Cualquiera que sea la herramienta utilizada con ánimo de mejorar la docencia será bien vista por los alumnos y seguro que, en mayor o menor medida, implicará y significará una mejora en la docencia de dicha asignatura. Es por ello que es fundamental no tirar la toalla y sentir siempre la necesidad de mejorar y de incluir nuevos retos en la impartición de clases. No se debe tomar como un trabajo sin recompensa, sino como un bien a la sociedad, actual y futura. Que el mundo vaya a delante depende de nosotros, pero más aún, de la sociedad futura. Y es esa sociedad futura la que debe aprender de nosotros, al menos, todo lo que ya sabemos. Ese es el camino para mejorar y la clave en el éxito de la especie humana. Metidos de lleno ya en el siglo XXI no hay ninguna duda de que la docencia debe adaptarse a la sociedad actual, pero también a las tecnologías actuales.

Hoy en día es mucho mayor el porcentaje de chavales de 18 años que van a la universidad, en relación a hace 20 o 40 años. Eso requiere entonces una diversificación de los estudios; no es necesario para nuestro mundo que haya tropecientos especialistas de lo mismo, basta con que todos sean bastante generalistas (mayor cultura general media) y unos pocos sean realmente especialistas de ámbitos muy particulares. Activar la motivación por un campo sí depende en gran parte del profesor. Todos sabemos y recordamos aquél profesor de Instituto que hizo que nos gustasen las matemáticas o la historia o… y eso marcó nuestro camino en la universidad. Pues lo mismo debe pasar ahí. El mundo avanza y la enseñanza no se puede quedar atrás.

Hechas ya estas reflexiones ciertamente metafísicas y filosóficas aunque imprescindibles como inicio, entremos en tratar de sacar algunas conclusiones más particulares en relación a lo que hemos descrito en este texto. Siempre, como se dice, el objetivo es mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje y claro está que las nuevas tecnologías nos lo ponen mucho más fácil. No debemos quedarnos atrás, como profesores, y debemos exprimir al máximo las posibilidades que nos ofrece la asignatura que impartimos en cada caso. Para las matemáticas, o para el Cálculo en particular, resulta esencial tratar de hacer entender los conceptos teóricos a los alumnos, así como activar su imaginación y capacidad de visualización de cuerpos en dos o tres dimensiones. El análisis razonado y el razonamiento de procesos lógicos, fundamentales en matemáticas. Todo ello requiere entonces la adaptación de material que contenga gráficos. Ese es el punto base. A partir de ahí puede pensarse en ejercicios y prácticas que los contengan, de ahí los ejercicios aleatorios y interactivos y los laboratorios virtuales; puede pensarse también en nuevas formas de evaluación, de ahí los cuestionarios de Moodle, los WirisQuizzes y los test de MapleTA; debe pensarse en nuevos materiales docentes a modo de apuntes y ejercicios… y todas estas herramientas deben ser gestionadas de una manera cómoda y práctica para el alumno. Eso es Moodle.

Estamos pues ante una solución magnífica, una plataforma de gestión de cursos, sencilla para el alumno y práctica para el profesor. El trabajo se facilita para el profesor, una vez el material está hecho, y el alumno agradece dicho material dedicándole tiempo y ganas a la asignatura. El resultado es óptimo y rápido: el alumno aprende y se divierte, eso le hace dedicarle todavía más tiempo, que le hace aprender y divertirse todavía más. La fórmula parece infalible.

A veces debemos ser un poco críticos con algunos casos, y es que si la carga docente del alumno es muy grande, éste acabará agotado y agobiado y no podrá dedicar el tiempo necesario, y si debe hacerlo por obligación, en lugar de aprender y divertirse, perderá el tiempo y se aburrirá, con lo cual la fórmula falla. Debemos medir muy justamente pues la cantidad de material que se ofrece y la cantidad de tareas que se asignan, con una coordinación óptima con el resto de asignaturas que cursa el alumno.

Aparecen también otras necesidades, como el contacto permanente entre alumno y profesor, pues existen tareas, evaluaciones o actividades muy a menudo, a diferencia de la docencia de hace 15 años, en la que había un examen a final de curso y de fecha fijada muchos meses antes. Aquí debe tenerse la seguridad de estar en contacto permanente con el alumno, y Moodle nos lo pone también fácil en ese sentido. Las líneas de futuro nos marcan también el camino de las consultas virtuales, sin duda con el éxito garantizado.

La grabación de sesiones en vídeo, las clases de televoto… todas estas soluciones son fantásticas para incentivar y activar la motivación del estudiante, que es sin duda lo imprescindible para que este aprenda. ¡Esa es la clave! Desde aquí invito a reflexionar a todos los instructores o profesores sobre sus métodos docentes, y les animo a tratar de incluir algún pequeño método de innovación docente y seguro que los resultados serán notablemente mejores.

En definitiva, **enseñar a aprender**. La innovación docente es un mundo tremendamente amplio. Existen una infinidad de soluciones para cada caso y aquí se ha tratado el del Cálculo. Lo que sí está claro es que supone la clave en el futuro de la enseñanza y es por ello que es de vital uso y más lo será próximamente. Cada equipo de trabajo debe poner en común sus opiniones y tratar de llevar a cabo algunas soluciones, y en cualquier caso, persistir, no desistir.

Bibliografia

Libros

[ESa08a] Estela, M.R., Saà, J. *Cálculo, con soporte interactivo en Moodle*. Pearson Prentice-Hall. Pearson Educación, S.A. (2008).

[ESe08] Estela, M.R., Serra, A. *Cálculo. Problemas resueltos*. Prentice Práctica. Pearson Educación, S.A. (2008).

[M04] Marsden, J.E., Tromba, A.J. *Cálculo Vectorial*. Pearson Prentice-Hall. Pearson Educación. (2004).

[O90] Ortega, J.M. *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona. (1990).

[R80] Rudin, W. *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill (1980).

[S95] Spivak, M. *Calculus*. Ed. Reverté, S.A. (1995).

Conferencias y artículos

[BEGS09] Blanco, M., Estela, M.R., Ginovart, M., Saà, J. *Computer Assisted Assessment through Moodle Quizzes for Calculus in an Engineering Undergraduate Course*. CIEAEM (2009). Montreal.

[ESa08b] Estela, M.R., Saà, J. *Cálculo, con soporte interactivo en Moodle*. CIDUI (2008). Lleida.

[ESa09] Estela, M.R., Saà, J. *Assessing calculus students in engineering.* Comunicación Oral en JEM(2009). Barcelona.

[ESBG09] Estela, M.R., Saà, J., Blanco, M., Ginovart, M. *Curs de Càlcul. Una nova metodología per a la impartició i gestió basades en l'entorn Moodle.* Jornada de presentación de resultats de projectes de millora de la docència (2009). Barcelona.

[ESE09] Estela, M.R., Saà, J., Eixarch, R. *Cálculo, con soporte interactivo en Moodle*. M-ICTE2009 (2009). Lisboa.

[H09] Huerta, A. *El Espacio Europeo de Educación Superior*. ETSECCPB (11/03/2009). Barcelona.

[SE08] Saà, J., Estela, M.R. *Cálculo, con soporte interactivo en Moodle*. Moodlemoot (2008). Barcelona.

[SE09] Saà, J., Estela, M.R. *Cálculo, con soporte interactivo en Moodle*. INTED (2009). Valencia.

Annejos

En este apartado se pretende recoger algunos resultados gráficos o soluciones y complementos a los apartados anteriores mediante herramientas que podían complicar la agilidad de lectura del texto en sí. Pese a ello, se ha creído conveniente no obviarlos dada su especial importancia y relevancia. Se han recogido cuatro bloques independientes de información y datos, básicamente relativos a métodos y algoritmos de programación.

Programación de ejercicios y laboratorios interactivos

Como se puede comprobar en el curso virtual se han desarrollado muchos ejercicios interactivos y laboratorios virtuales cuya programación se ha llevado a cabo mediante tecnología Wiris. Esta programación es sencilla y especialmente user friendly pero no por ello debemos obviar algunos ejemplos. Lógicamente se podrían llenar varios volúmenes con todos los códigos programados pero la intención de este apartado del anejo es recoger un par a fin de mostrar la metodología de programación de los mismos. Ante cualquier duda o ampliación de estos contenidos se puede acceder al código libre de los mismos mediante la versión web o acudiendo a los autores.

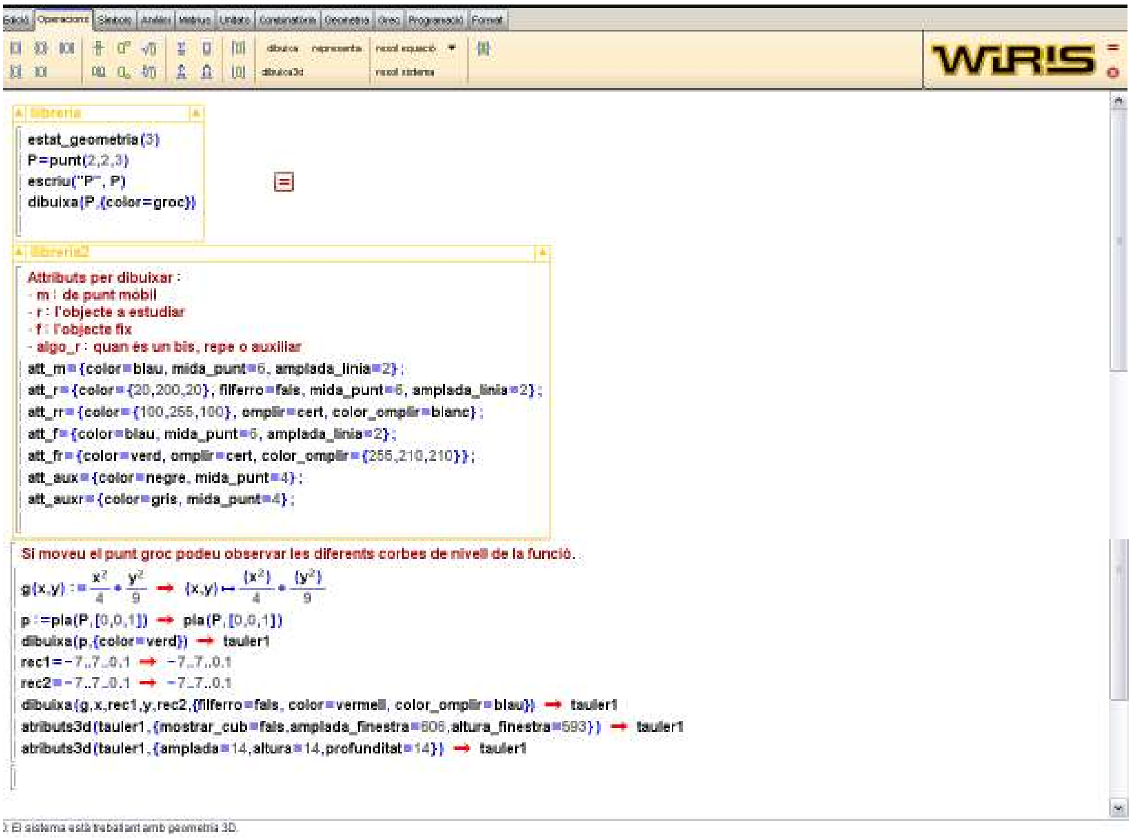


Ilustración 52 - Código fuente de un laboratorio virtual sobre curvas de nivel

Si compilamos dicho código (sencillamente mediante el click del botón =) se obtiene el gráfico interactivo siguiente (damos dos capturas según la posición del plano que definimos moviendo el punto amarillo, cada plano define una curva de nivel distinta).

Ilustración 53 - Visualización del código fuente compilado anterior. Ejemplo de un laboratorio virtual

El uso de las librerías (código entre cuadros amarillos) en la programación de estos laboratorios tiene dos ventajas muy notables: nos asegura el formato idéntico para todos los laboratorios del curso, mediante una librería de formato; y nos ahorra código común entre algoritmos. Si nos referimos a un sencillo ejercicio interactivo, el código fuente base puede resumirse en la siguiente imagen.

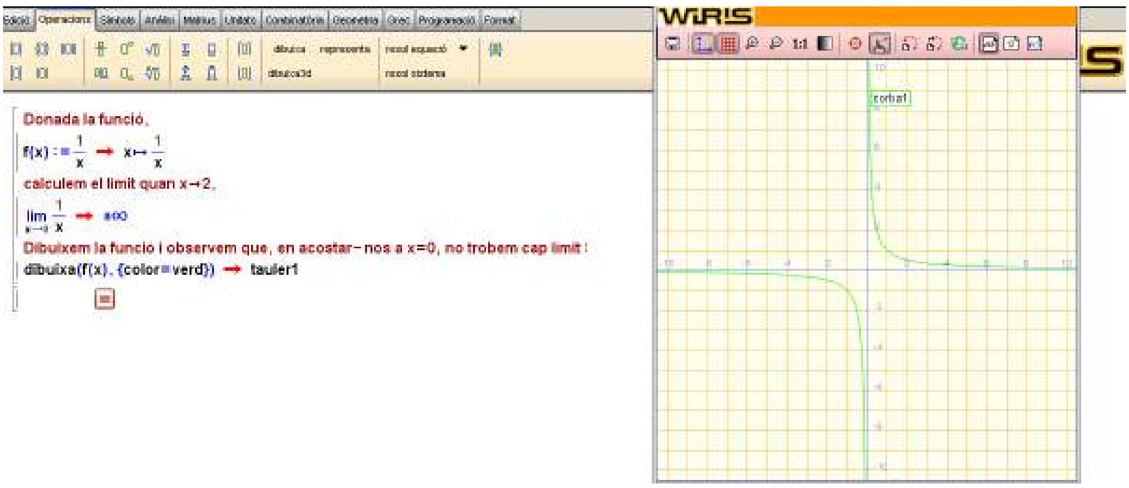


Ilustración 54 - Código y ejecutable de un ejercicio interactivo

Observamos la visualización del cálculo del límite mediante el gráfico así como la solución a dicho límite calculado mediante el motor de cálculo de Wiris (resultados tras la flecha roja).

A continuación observamos un ejemplo de gráfico tridimensional programado con Wiris en el que se usa una primera librería de formato y luego se compila. Una vez compilado, como lo importante de este corto código es la visualización del gráfico, se procede a moverlo hasta una posición óptima de visualización; una vez ahí, se procede a guardar los cambios en el código (de forma automática) y se guarda el código así. De esta forma, al abrirse automáticamente el gráfico donde le corresponda, se visualizará directamente en su posición óptima, es decir, más impacto inicial sin trabajo por parte del lector.

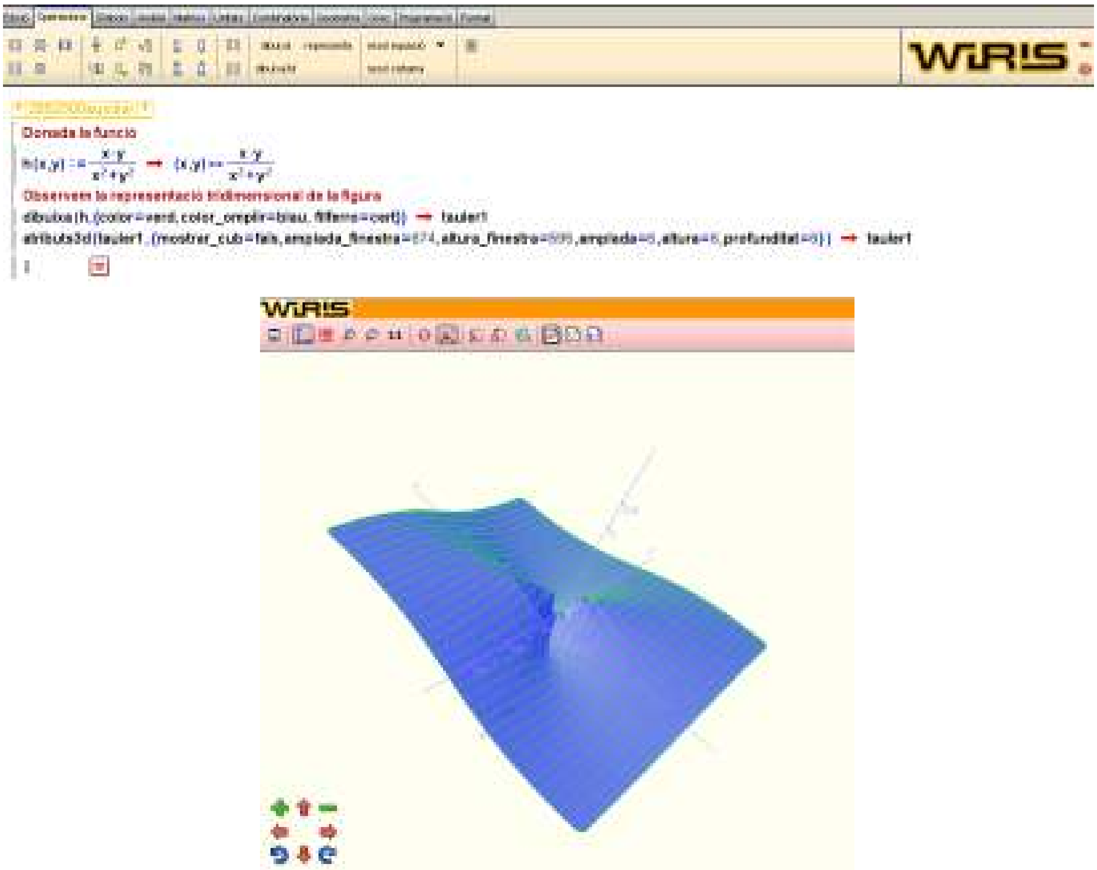


Ilustración 55 - Código y visualización de un gráfico interactivo de Wiris para Moodle

Si el lector mueve el gráfico, sencillamente manteniendo el clic sobre el botón derecho del ratón, puede cambiar la visualización de la figura, hasta la posición siguiente, por ejemplo. También haciendo uso de los accesos directos de la ventana.

Ilustración 56 - Figura anterior desde distinto punto de vista

Como culminación de la elaboración de estos ejercicios debe decirse que, antes de su incorporación al fantástico mundo Moodle, se pretendían incluir en una web como archivos HTML. Eso no es tampoco una mala idea, y es por ello que adjuntamos aquí ambos, el aspecto final que tendría y el código fuente de que deberíamos usar para publicar dichos ejercicios o laboratorios virtuales mediante una página web programada en lenguaje HTML.

```
<HTML>
<head>
<link rel="stylesheet" href="../templates/evam.css" type="text/css">
<script language="JavaScript"  src="../templates/evam.js"></script>
<title>EVAM</title>
<style type="text/css">
<!--
-->
</style>
</head>
```

Encabezamiento y título

```
<BODY bgColor='#6599CC' leftmargin="5" topmargin="0" marginwidth="5"
marginheight="0">

<table width="100%">
  <tr>
    <td align="left" width="234"><a href="http://www.upc.edu"
target="_blank"><img src="../images/server/upc/ca/logoUPC_complet.gif"
border="0" align="absmiddle" width="234"></a>
    </td>
    <td align="left" valign="middle">  <a href="../index.htm"
target="_blank" class="titol">EVAM</a><span
class="indexseparator"> &gt; </span></td>
    <td align="right" valign="middle"><a href="javascript:refrescar()"
class="indexchapter">restaurar</a>  <a
href="javascript:tancar()"
class="indexchapter">tancar  </a></td>
</tr>
</table>
<center>
  <p class="indexchapter">GR&Agrave;FIC INTERACTIU</p>
  <p class="indexsection">Si no apareix cap dibuix feu clic sobre la
fletxa vermella</p>
```

Texto inicial y formato general

```
  <p><applet
  code="WirisApplet.class"
  codeBase="http://defalla.upc.es/~crsd/Wiris/"
  archive="wrs_ca_upc.jar"
  height="100"
  width="700"
  >
      <PARAM NAME="progressbar"    VALUE="true">
      <PARAM NAME="requestFocus"    VALUE="true">
      <PARAM NAME='requestFirstEvaluation'    VALUE='true'>
      <PARAM NAME="version" VALUE="1.0">
      <PARAM NAME="domain" VALUE="false">
      <PARAM NAME="font" VALUE="SansSerif">
      <PARAM NAME="fontStyle" VALUE="1">
      <PARAM NAME="fontSize" VALUE="16">
      <PARAM NAME="command" VALUE="false">
      <PARAM NAME="commands" VALUE="false">
      <PARAM NAME="interface" VALUE="false">
      <PARAM NAME="toolbar" VALUE="true">
      <PARAM NAME="initialText" VALUE=
```

Código HTML generado por Wiris
al programar cada ejercicio

```
'\interface{\beginvcenter \commands{\beginvcenter
\command{\beginmultiline att\_m{=}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
color{=}blau,{\space}mida\_punt{=}6,{\space}gruix\_linia{=}2\endvbox
};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline att\_mr{=}\Bparentesis{\beginvbox
color{=}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
0,100,255\endvbox
},{\space}omplir{=}cert,{\space}color\_omplir{=}blanc\endvbox
};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline att\_r{=}\Bparentesis{\beginvbox
color{=}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
20,200,20\endvbox
},{\space}mida\_punt{=}6,{\space}gruix\_linia{=}2\endvbox
};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline att\_rr{=}\Bparentesis{\beginvbox
color{=}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
100,255,100\endvbox
},{\space}omplir{=}cert,{\space}color\_omplir{=}blanc\endvbox
};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline att\_f{=}\Bparentesis{\beginvbox
color{=}vermell,{\space}mida\_punt{=}6,{\space}gruix\_linia{=}2\endvbo
x&#32;
};\endmultiline }{}\cr \command{\beginmultiline
att\_fr{=}\Bparentesis{\beginvbox
color{=}rosa,omplir{=}cert,{\space}color\_omplir{=}\Bparentesis{\begin
vbox&#32;
255,210,210\endvbox }\endvbox };\endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline att\_titol{=}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
font\_negreta{=}cert\endvbox };\endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline att\_aux{=}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
color{=}negre,{\space}mida\_punt{=}4\endvbox };\endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline&#32;
att\_auxr{=}\Bparentesis{\beginvbox
color{=}gris,{\space}mida\_punt{=}4\endvbox };\endmultiline&#32;
}{}\cr \comment{\beginmultiline
EXCENTRICITAT{\space}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\
_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\endmultiline&#32;
}\cr \command{\beginmultiline A1{=}punt(0,{-}2);\endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline&#32;
A2{=}punt(1,{-}1);\endmultiline }{}\cr \command{\beginmultiline
A3{=}punt({-}1,{-}1);\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline A4{=}punt(2,2);\endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline&#32;
A5{=}punt({-}2,2);\endmultiline }{}\cr \command{\beginmultiline
c{\assign}cònica\pparentesis{A1,A2,A3,A4,A5};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
e{\assign}excentricitat\pparentesis{c};\endmultiline&#32;
}{}\cr \comment{\beginmultiline dibuixem\endmultiline }\cr
\command{\beginmultiline
tauler\pparentesis{\Bparentesis{\beginvbox&#32;
mostrar\_malla{=}cert,{\space}informació{=}{\quote}valor{\quote}\endvb
ox }};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
dibuixar\pparentesis{c,{\space}att\_f{\space}};\endmultiline&#32;
}{}\cr \comment{\beginmultiline llegenda{\space}títol\endmultiline
}\cr \command{\beginmultiline&#32;
q\_llegenda{\assign}polígon\pparentesis{punt\pparentesis{{-
}8.5,10},punt\pparentesis{8.5,10},punt\pparentesis{8.5,7.5},punt\ppare
ntesis{{-}8.5,7.5}};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
dibuixar\pparentesis{q\_llegenda,{\space}att\_mr};\endmultiline&#32;
```

Código HTML generado por Wiris

```
}{}\cr \command{\beginmultiline
escriu({\quote}Excentricitat{\quote},punt({-
}8,9),{\space}att\_titol);\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
escriu({\quote}Observa{\space}l{\prima}excentrictat{\space}de{\space}l
a{\space}cònica{\space}que{\space}passa{\space}pels{\space}punts.{\quo
te},punt({-}8,8));\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline \endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline
dibuixar\pparentesis{\Bparentesis{\beginvbox&#32;
A1,A2,A3,A4,A5\endvbox },{\space}att\_m{\space}};\endmultiline }{}\cr
\command{\beginmultiline&#32;
\endmultiline }{}\cr \comment{\beginmultiline llegenda\endmultiline
}\cr \command{\beginmultiline&#32;
defecte\pparentesis{capsa\_de\_text,\Bparentesis{\beginvbox
font\_negreta{=}cert\endvbox&#32;
}};\endmultiline }{}\cr \command{\beginmultiline
lx{=}8.5;\endmultiline }{}\cr \command{\beginmultiline&#32;
dibuixar\pparentesis{polígon\pparentesis{punt\pparentesis{{-}lx,{-
}2.8},punt\pparentesis{{-}3,{-}2.8},punt\pparentesis{{-}3,{-
}5.5},punt\pparentesis{{-}lx,{-
}5.5}},{\space}att\_fr};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
escriure({\quote}e{=}{\quote},{\space}punt\pparentesis{{-}7.2,{-
}4},{\space}att\_f{\space}|{\space}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
posició\_horitzontal{=}{\quote}esquerra{\quote}\endvbox
});\endmultiline }{}\cr \command{\beginmultiline&#32;
escriure(e,{\space}punt\pparentesis{{-}7.2,{-
}4},{\space}att\_f{\space}|{\space}\Bparentesis{\beginvbox&#32;
posició\_horitzontal{=}{\quote}dreta{\quote}\endvbox });\endmultiline
}{}\cr \command{\beginmultiline&#32;
escriure\pparentesis{obtenir\_domini\pparentesis{c},punt\pparentesis{{
-}8,{-}5},{\space}att\_f};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
dibuixar\pparentesis{polígon\pparentesis{punt\pparentesis{{-}lx,{-
}6},punt\pparentesis{{-}3,{-}6},punt\pparentesis{{-}3,{-
}9.5},punt\pparentesis{{-}lx,{-
}9.5}},{\space}att\_rr};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
escriure\pparentesis{{\quote}e<1{\space}{\space}el·lipse{\space}{\quot
e},punt\pparentesis{{-}8,{-}7},{\space}att\_r};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
escriure\pparentesis{{\quote}e>1{\space}{\space}hipèrbola{\space}{\quo
te},punt\pparentesis{{-}8,{-}8},{\space}att\_r};\endmultiline&#32;
}{}\cr \command{\beginmultiline
escriure\pparentesis{{\quote}e{=}1{\space}paràbola{\space}{\quote},pun
t\pparentesis{{-}8,{-}9},{\space}att\_r};\endmultiline&#32;
}{}\endvcenter }\endvcenter }'
>
    </applet></p>
  <table border="0" cellspacing="0" cellpadding="5" align="center"
width="700">
    <tr>
      <td align="center" colspan="2" class="explicacioblau">
        <p>En aquest exercici heu de modificar els elements del dibuix
per treballar
          diferents conceptes. Per modificar un punt us hi heu de
situar amb el
          ratol&iacute; - el cursor adoptar&agrave; forma de ma -, fer
clic amb
```

Código HTML generado por Wiris

Texto inferior y formato

```
          el bot&oacute; esquerre del ratol&iacute; i sense deixar de
pressionar
          el bot&oacute; moure el punt a la nova posici&oacute;.</p>
        <p>El codi de colors us permetr&agrave; saber
r&agrave;pidament quins
          s&oacute;n els elements importants del dibuix:</p>
      </td>
    </tr>
    <tr>
      <td align="center" bgcolor="blue"><b><font
color="#FFFFFF">blau</font></b></td>
      <td class="explicacioblau">Punt m&ograve;bil.</td>
    </tr>
    <tr>
      <td align="center" bgcolor="green"><b><font
color="#FFFFFF">verd</font></b></td>
      <td class="explicacioblau">Punt m&ograve;bil amb moviments
restringits.</td>
    </tr>
    <tr>
      <td align="center" bgcolor="red"><b><font
color="#FFFFFF">vermell</font></b></td>
      <td class="explicacioblau">La soluci&oacute; o els elements que
volem estudiar.</td>
    </tr>
  </table>
      </center>
<table width="100%">
<tr>
  <td align="right">desenvolupat per <a
href="http://www.mathsformore.com" target="_blank"
class="mathsformore">Maths for More</a></td>
</tr>
</table>
</body>
</html>
```

Texto inferior y formato

Autoría y cierre

Y el resultado es el siguiente:

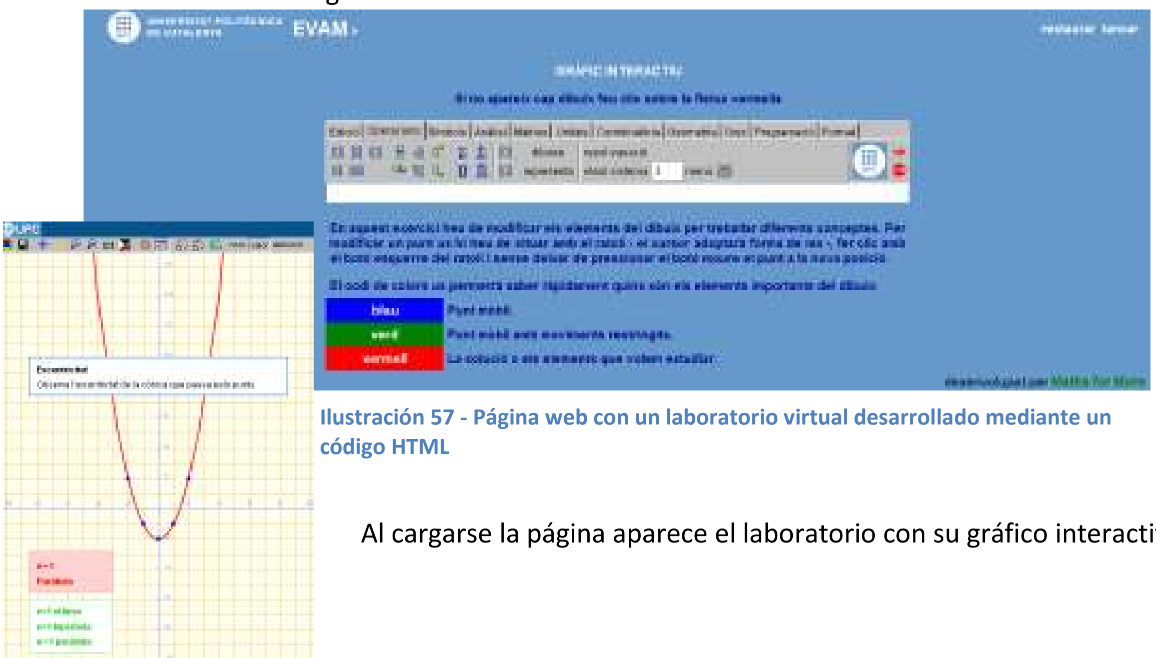


Ilustración 57 - Página web con un laboratorio virtual desarrollado mediante un código HTML

Al cargarse la página aparece el laboratorio con su gráfico interactivo.

Ejemplos paso a paso de WirisQuizzes

Primer ejemplo

El primer ejemplo que mostramos está basado en una cuestión de tipo Opción Múltiple en el entorno de cuestionario de Moodle. Se trata de crear una nueva pregunta de tipo Opción múltiple y rellenar los distintos campos tal y como sigue. ***Question name:*** Factorization of integer numbers

1. ***Texto de la pregunta:*** ¿Cuál es la factorización de #n?
2. ***Opción 1, Respuesta:*** #a
3. ***Opción 1, Nota:*** 100%
4. ***Opción 2, Respuesta:*** #b
5. ***Opción 2, Nota:*** ninguna
6. ***Opción 3, Respuesta:*** #c
7. ***Opción 3, Nota:*** ninguna
8. Clicar sobre cualquier botón de "mostrar opciones avanzas". En la parte inferior de la página aparecerá una sesión de Wiris dónde debemos escribir lo siguiente.
9. Para introducir el repeat … until, debe irse al apartado de programación en la barra de herramientas y clicar repeat.

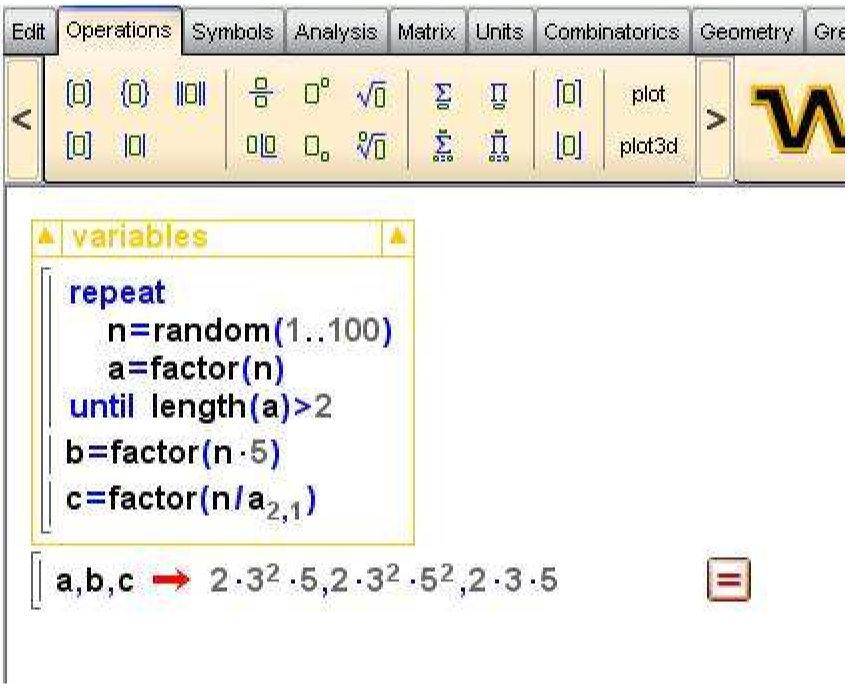


Ilustración 58 - Captura de la programación de un WQ

10. Se puede introducer cualquier expression fuera del recuadro Amarillo, y luego clicar sobre el símbolo [=] para probar el miniprograma.
11. Ahora ya está listo para clicar sobre "guardar cambios" y probar la pregunta.

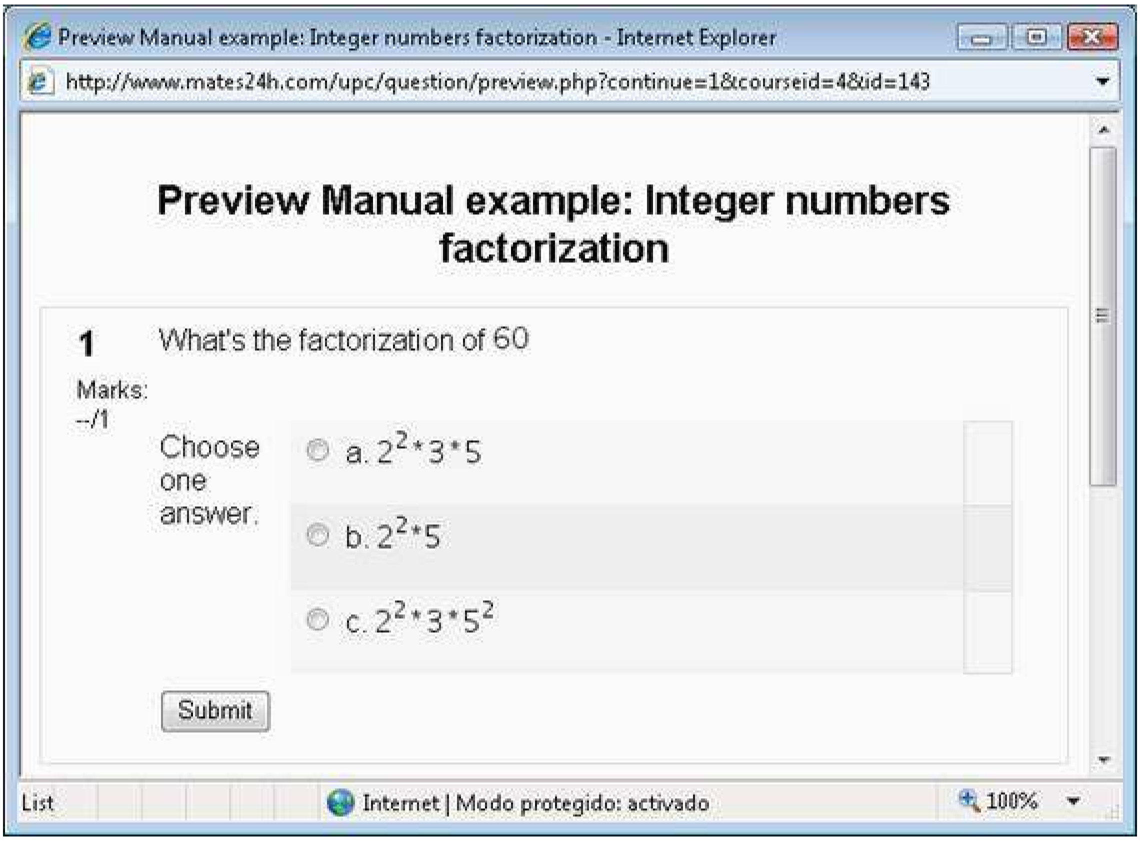


Ilustración 59 - Visualización de una pregunta de WQ

De este ejemplo previo se puede inferir lo siguiente:

1. El objetivo del software Wiris es definir varias variables matemáticas que tomarán valores más o menos aleatorios para las posteriores expresiones matemáticas.
2. Las variables pueden estar situadas en cualquier sitio, ya sea en la pregunta, la respuesta, el feedback… simplemente siendo llamadas mediante el símbolo # seguido del nombre de la variable (#a, #b, ...)
3. El programa tiene dos partes diferenciadas, la librería (recuadro amarillo) y su parte exterior:

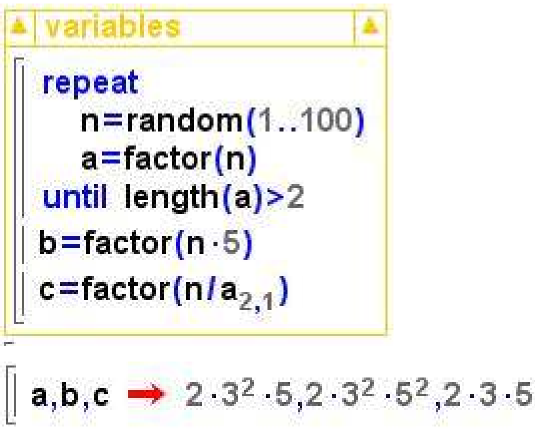


Ilustración 60 - Librería y programación de prueba de un WQ

Cuando se edita una pregunta, los profesores pueden realizar tantos cálculos como se precise fuera de la librería. Pese a ello, cuando el estudiante usa la pregunta, exclusivamente se computa la parte en el interior del cuadro amarillo, ignorando todo lo exterior.

Segundo ejemplo

Este ejemplo está basado en las cuestiones de tipo respuesta corta. Se debe pues elegir dicho tipo de pregunta para crearla y rellenar sus campos con lo que sigue.

1. ***Nombre de la pregunta:*** Ejercicio de derivación sencillo
2. ***Texto de la pregunta:*** $\text{Compute } \frac{d\ \#a}{dx}$ (use el editor de fórmulas)
3. ***Respuesta 1, Respuesta:*** #b
4. ***Respuesta 1, Nota:*** 100%
5. ***Respuesta 2, Respuesta:*** #c
6. ***Respuesta 2, Nota:*** 50%
7. ***Respuesta 3, Respuesta:*** #d
8. ***Respuesta 3, Nota:*** 50%
9. ***Editor de fórmulas:*** elegir como cierto
10. ***Con el programa:***

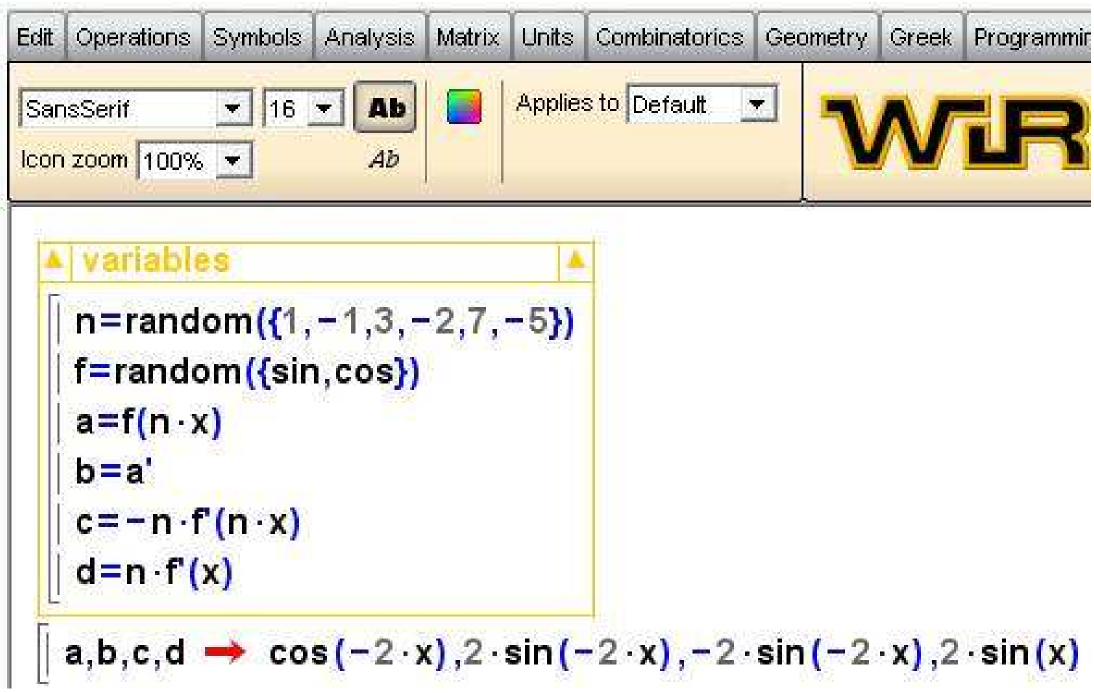


Ilustración 61 - Programación de una cuestiónd e WQ

Y entonces la visualización de la pregunta queda tal y como sigue en la imagen que mostramos a continuación. Obsérvese que al ser de respuesta abierta, la respuesta puede ser, en este caso, parcialmente correcta, contando en ese caso, una parte exclusivamente de la puntuación total de la pregunta.

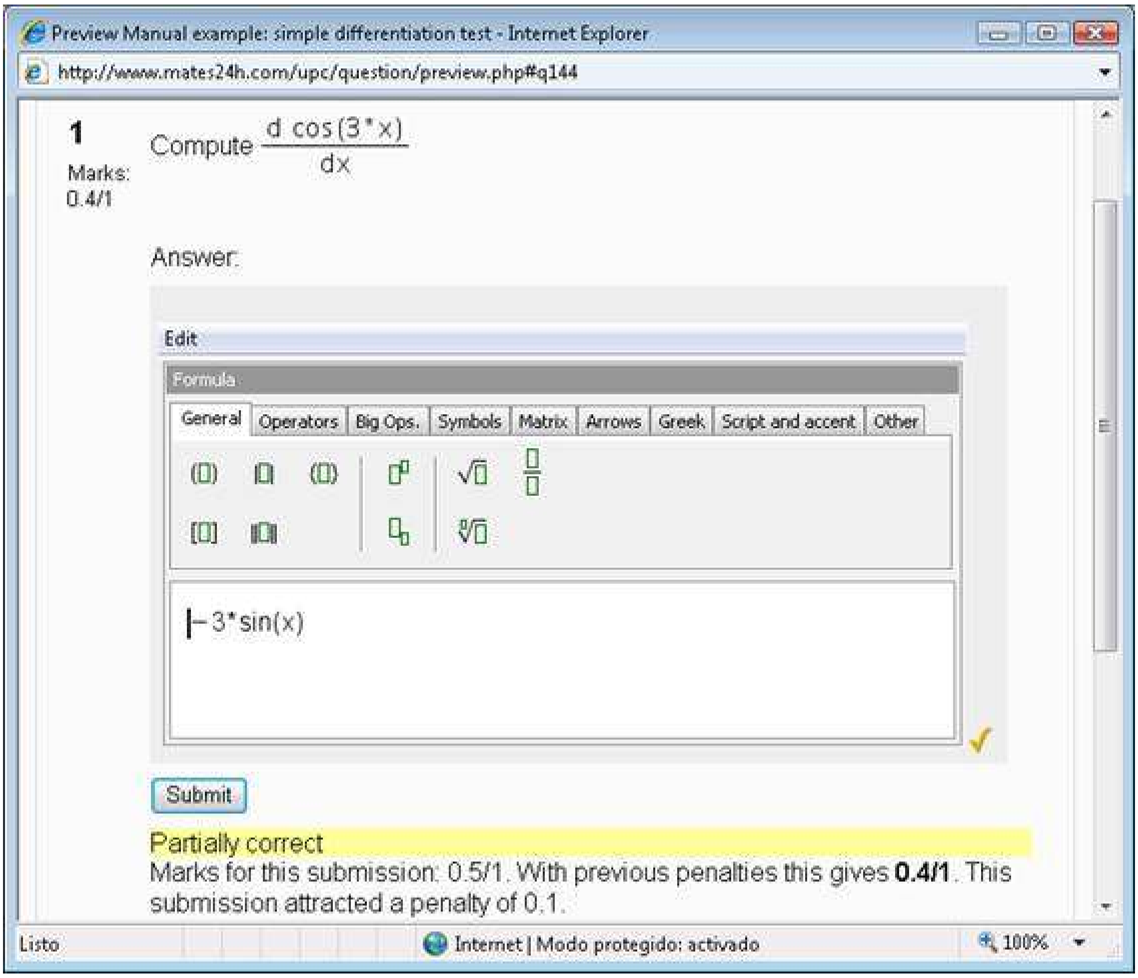


Ilustración 62 - Pregunta de respuesta corta con la respuesta parcialmente correcta

Nótese lo siguiente:

1. Se puede usar el editor de fórmulas en la pregunta. En este caso, cualquier variable de la forma #<nombre> sera expandida por la variable con el mismo nombre que el definido en el programa.
2. Si se permite el uso del editor de formulas Wiris en las respuestas cortas, ésta podrá ser introducida mediante el editor.

Ejemplos de programación de los cuestionarios de MapleTA

Como se ha comentado a lo largo del apartado correspondiente del texto (ver capítulo de líneas de futuro – Uso de otros programas matemáticos) se han desarrollado en colaboración con múltiples equipos de varias universidades europeas unos bancos muy numerosos y de alta calidad de preguntas de ámbito matemático (también físico…) mediante el software MapleTA. Actualmente estas preguntas podrán ser usadas en un curso de Moodle sin excesivos problemas gracias a los últimos desarrollos. A continuación adjuntamos el código de programación de un par de preguntas, subidas a Moodle a partir de este código. Nótense las analogías con la programación de WirisQuizzes en las llamadas a variables.

```
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage{ed}    %Debe compilarse con ayuda del archivo ed.sty

\begin{document}
\begin{topic}{Integrals Racionals}
        \begin{question}{Maple}
                \qutext{Calculeu \[ \int \frac{\var{a}}{x+\var{b}} \]}
                \answer{int($a/(x+($b)),x)}
                \maple{simplify(diff($ANSWER,x)-($a/(x+($b))))=0}
                \code{ $a=range(-10,10);
                        condition:not(eq($a,0));
                        $b=range(1,10);
                        condition:not(eq($b,0));
                }
        \end{question}
        \begin{question}{Maple}
                \qutext{Donada una funcio $f$, trobeu la seva primitiva\\ \begin{center}
\var{f} \end{center}}
                \answer{int($eq,x)}
                \maple{simplify(diff($ANSWER,x)-($eq))=0}
                \code{ $a=range(-10,10);
                        condition:not(eq($a,0));
                        $b=range(-10,10);
                        condition:not(eq($b,0));
                        $c=range(-10,10);
                        condition:not(eq($c,0));
                        $d=range(-10,10);
                        condition:not(eq($d,0));
                        $eq = maple("(($a)/(x-($c)))+(($b)/(x-($d)))");
                        condition:not(eq($eq,0));
                        $f = maple('MathML:-ExportPresentation(f(x) =
normal(factor($eq),expanded))');
                }
        \end{question}
\end{topic}
\begin{topic}{P. Teoriques}
        \begin{question}{Multiple Choice}
                \qutext{Donada $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ aleshores}
                \choice*{Si $f$ \'es continua t\'e primitiva.}
                \choice{Si $f$ \'es integrable \'es continua.}
                \choice{Si $f$ est\`a fitada \'es integrable.}
                \choice{Si $f$ \'es integrable t\'e primitiva.}
                \choice{Cap de les altres.}
        \end{question}
\end{topic}
\end{document}
```

Esta última pregunta (de las tres que hay en el código LaTeX anterior) no se había adjuntado anteriormente en el texto, por no ser del tipo de preguntas aleatorias de las que se hablaba. Simplemente es un ejemplo de pregunta elaborada en TeX que se sube a Moodle usando los símbolos matemáticos que el lenguaje TeX ofrece, mucho más potente, elaborado y visualmente atractivo que el que tiene por defecto Moodle. El resultado sería el siguiente.

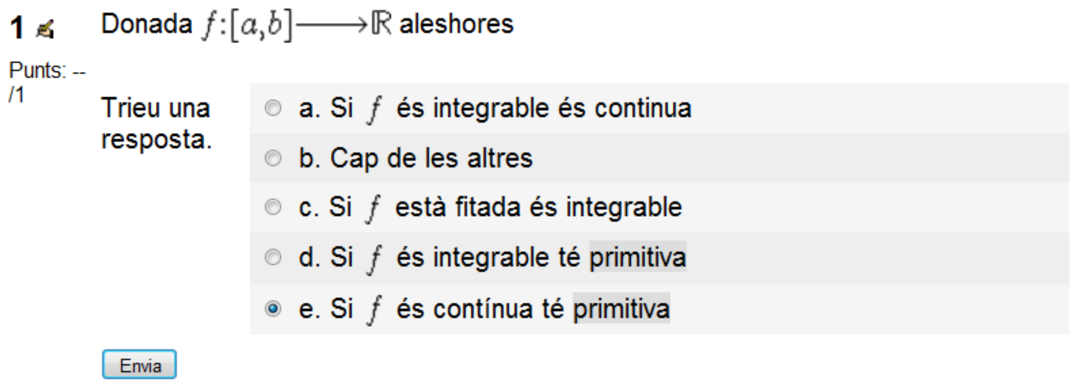


Ilustración 63 - Visualización de una pregunta en Moodle elaborada en LaTeX

Anteriormente a poder integrar MapleTA en Moodle, este software matemático se desarrollaba en un servidor externo y mediante un protocolo que nada tenía que ver con Moodle. También muy útil, pero con el negativo hándicap de no estar integrado en la tipología del resto de alternativas y soluciones. Una muestra la vemos en la siguiente imagen: obsérvense las posibilidades de cambio de idioma o de banco de preguntas. Un menú también muy útil.

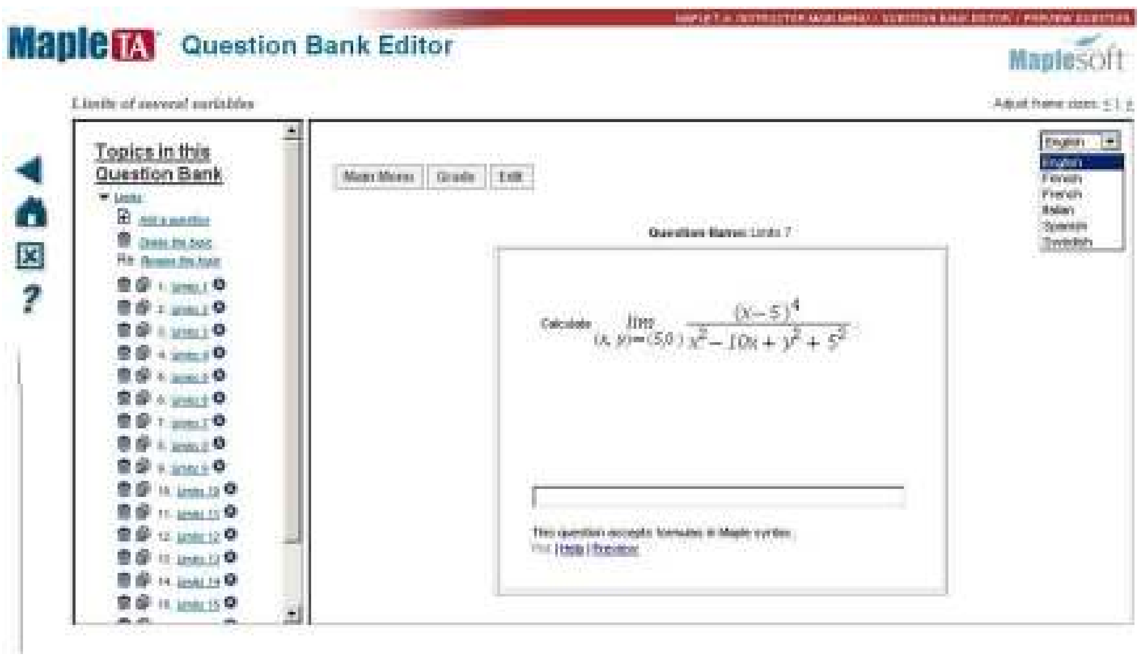


Ilustración 64 - Entorno MapleTA en la versión no integrada en Moodle